Seminario: Lógicas no Clásicas: inconsistencias sin trivialidad

Lógicas Modales

Eduardo Alejandro Barrio - Lucas Rosenblatt

Universidad de Buenos Aires - Conicet

Buenos Aires - Primer cuatrimestre de 2016

Semana 2

Objetivos:

- presentación de la lógica clásica como un sistema de Tableaux
- presentación de la lógica clásica como un sistema de secuentes.
- presentación de las lógicas modales (extensiones de la lógica clásica)
    - Axiomatizaciones - Modelos - Tableaux

Recursos

Libro:

Priest *Introduction to non-classical Logic Caps 1 y 2*

Ficha de Cátedra (OpFyL)

Internet:

Stanford

http://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/ James Garson
http://plato.stanford.edu/entries/logic-modal-origins/ Roberta Ballarin

Internet Encyclopedia

http://www.iep.utm.edu/modal-lo/ van Benthem

Sitio BA-Logic

ba-logic.com Clase 2

Lógicas no extensionales

Lógica	Símbolos	Expresiones formalizadas
Logic Modal	□	It is necessary that ..
	◊	It is possible that …
Lógica Deontica	O	It is obligatory that …
	P	It is permitted that …
	F	It is forbidden that …
Lógica temporal	G	It will always be the case that …
	F	It will be the case that …
	H	It has always been the case that …
	P	It was the case that …
Lógica doxástica	B	x believes that …
	K	x sabe que…

Fallas de sustitutividad - intensionalidad - opacidad
no veritativo funcionales

Inferencias que involucran modalidades

Es posible que A y B. **Por lo tanto**, es posible que A y es posible que B

Es necesario que A sea falsa. **Por lo tanto**, no es posible que A

Es necesario que A. Es posible que B. **Por lo tanto**, es posible que A y B.

Es necesario que A Por lo tanto, A

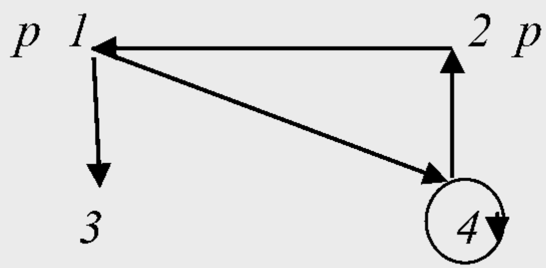
Es necesario que sea posible que A. **Por lo tanto**, es necesario que sea posible que sea necesario que sea posible que A

Lógica Modal: intuiciones

- El condicional material no representa la implicación lógica (entailment / implicación estricta)
- (1) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ & (2) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $\Box \phi$ dice que ϕ es verdadero en todo mundo posible w
- $\Diamond\phi$ dice que ϕ es verdadero en algún mundo posible w
- Que una formula ϕ sea verdadera en todo mundo posible no significa que sea válida en una lógica modal.
- Validez y necesidad no son necesariamente equivalentes.
- $M, w \vDash \phi$ dice que ϕ es verdadera en el modelo M en el mundo w.
- Para que una formula sea válida debe ser verdadera en todo modelo
- Para que una formula sea necesaria debe ser verdadera en todo mundo.
- $\Box \phi \rightarrow \phi$ es valido
- $\phi \rightarrow \Box \phi$ no es valido
- $\Box \phi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\phi$ es valido.
- $\Box(\phi\rightarrow\psi)\rightarrow(\Box\phi\rightarrow\Box\psi)$ es válido (analogía con la cuantificación universal)
- $\Box\Box\Diamond\phi$? $\Box\Diamond\Box\phi$?

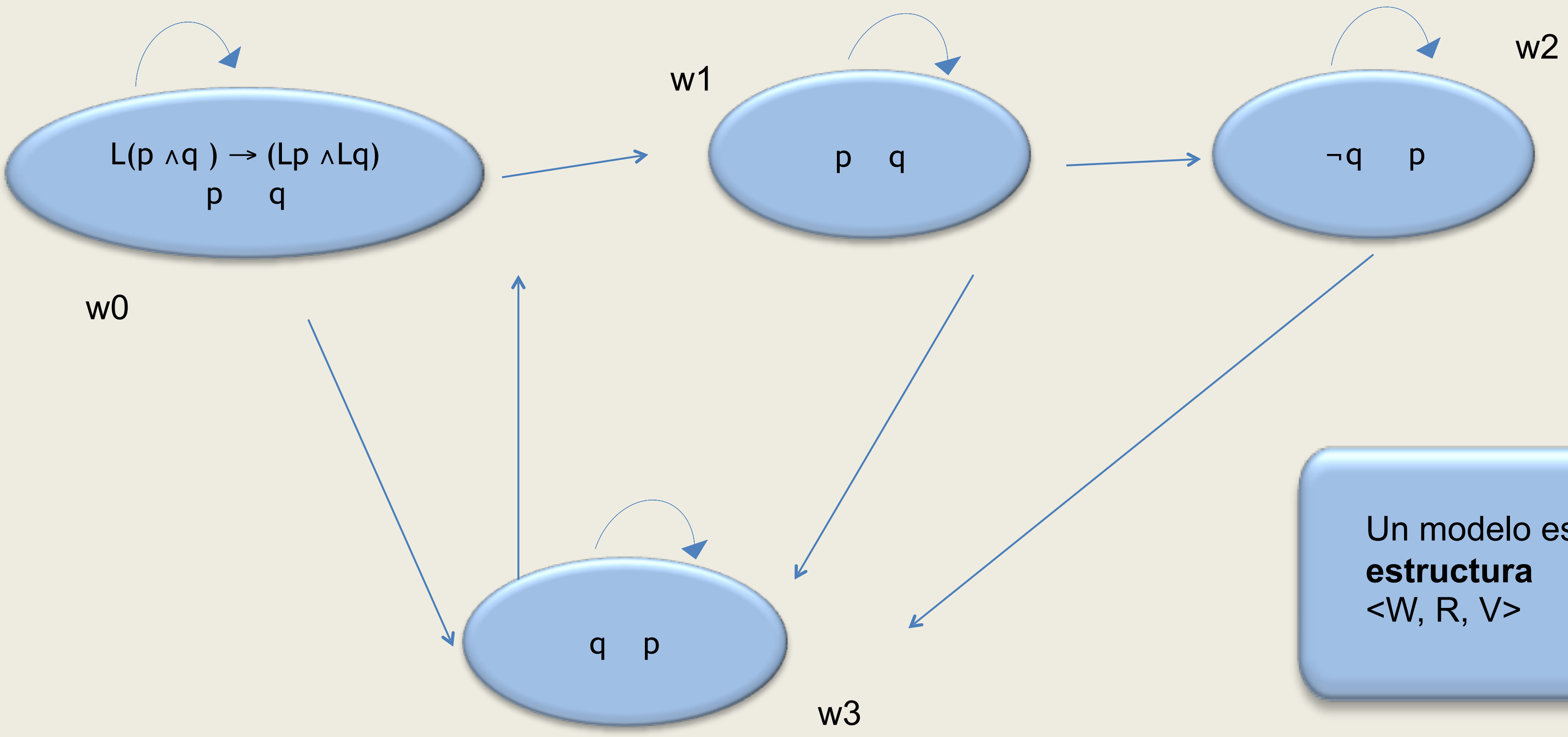
Lógica Modal: intuiciones

- $\Box\Diamond\phi$
- $\Diamond\Box\phi$



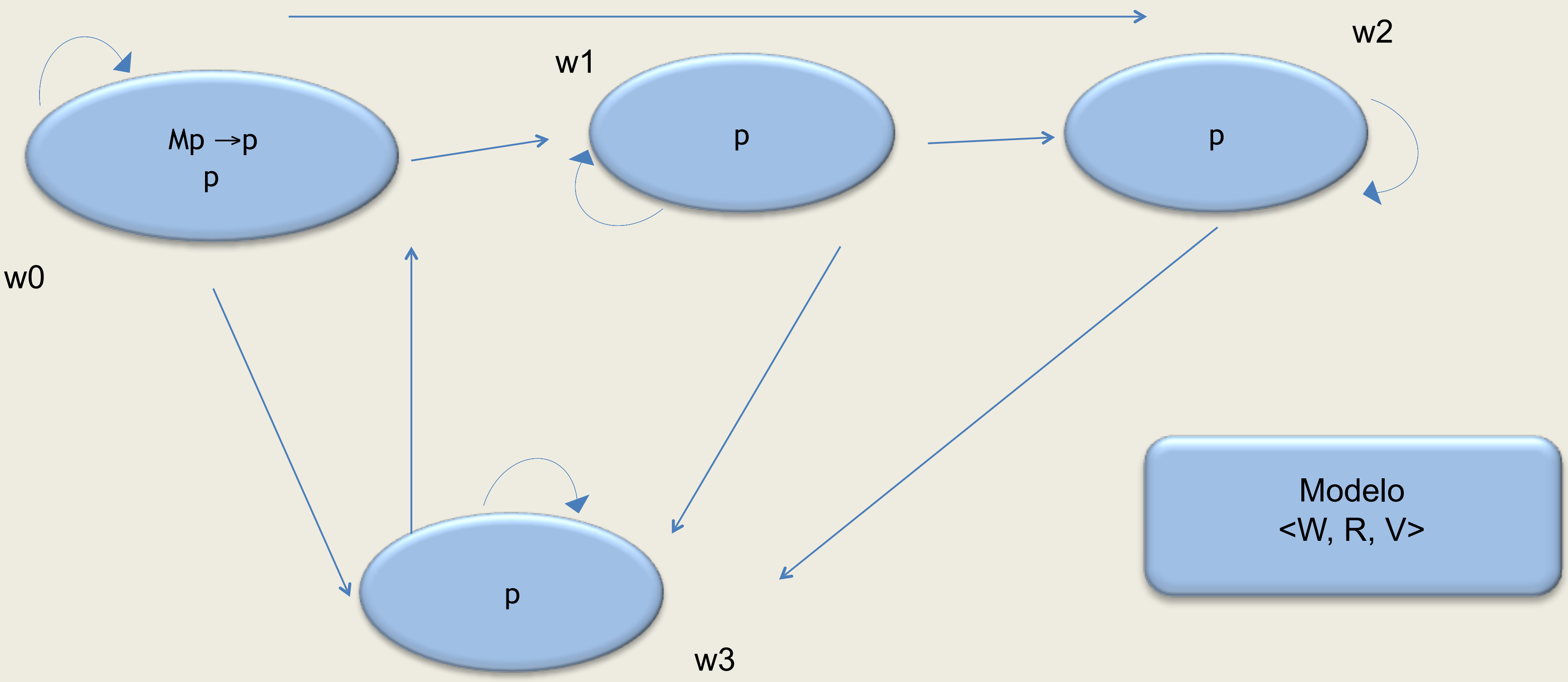
La accesibilidad entre mundos (las relaciones entre puntos) condiciona la verdad en un mundo de las formulas que tienen operadores modales

La totalidad de los modelos condicionan la validez.



Un modelo es una **estructura**
<W, R, V>

V (Lp, w_0): 1 ssi V le asigna 1 a p en w_0 y en todo mundo accesible desde w_0.
V (Mp, w_0): 1 ssi E le asigna 1 a p en w_0 y en algún mundo accesible desde w_0.
α es **válida universalmente** ssi es verdadera en todo mundo de toda estructura



Relación de Accesibilidad entre mundos:

Reflexividad:	∀w Rww
Transitividad:	∀w ∀x ∀y (Rwx ∧ Rxy→Rwy)
Simetría	∀w ∀x (Rwx → Rxw)

Propiedades de las relaciones binarias

Reflexividad:	$\forall x\, Rxx$
Simetría:	$\forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow Ryx)$
Transitividad:	$\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$
Lineal:	$\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow (Ryz \vee y = z \vee Rzy))$
Serial:	$\forall x\, \exists y\, Rxy$
Funcional	$\forall x\, \exists y\, (Rxy \wedge \exists z\, (Rxz \rightarrow y = z))$
Euclidea	$\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \wedge Rxz) \rightarrow Ryz)$
Determinista:	$\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow y = z)$

Reflexividad:	$Lp \rightarrow p$	(T)
Simetría:	$p \rightarrow LMp$	(B)
Transitividad:	$Lp \rightarrow LLp$	(S4)
Lineal:		
Serial:	$Lp \rightarrow Mp$	(D)
Fucional:	$Lp \leftrightarrow Mp$	
Euclidea:	$Lp \rightarrow LMp$	(S5)
Determinista:	$Mp \rightarrow Lp$	

Las propiedades impuestas sobre las relaciones de accesibilidad definen **familias de estructuras**.

Distintas axiomatizaciones de *Lógica Modal*

- La lógica modal es una extensión de la lógica clásica.
- Todo teorema de la lógica proposicional es un teorema de la lógica proposicional modal.
- Toda derivación correcta de la lógica proposicional es una derivación correcta de la lógica proposicional modal.
- Toda fórmula universalmente válida de la lógica proposicional es una fórmula universalmente válida de la lógica proposicional modal.
- Todo caso de consecuencia lógica proposicional es un caso de consecuencia lógica modal.

Distintas axiomatizaciones de *Lógica Modal*

Sistema K

(A1) $(B \supset (A \supset B))$
(A2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$

(A3) $((\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset A)$

(A5) $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$

Sistema T

(A4) $\Box A \supset A$
(A5) $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$

Reglas de Inferencia: **SE** **MP**

Nec: Si una fórmula es teorema, el resultado de anteponerle el operador de necesidad también es teorema.

R4: Si $(A \supset B)$ es un teorema, entonces $(\Box A \supset \Box B)$ es un teorema.

Distintas axiomatizaciones de *Lógica Modal*

Teoremas de T:

T1: $(p \supset \Diamond p)$

T2: $\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$

T3: $\Box p \equiv \neg\Diamond\neg p$

T4: $\neg\Box p \equiv \Diamond\neg p$

T5: $\neg\Diamond p \equiv \Box\neg p$

T6: $\Diamond (p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$

T7: $(\Box p \vee \Box q) \supset \Box(p \vee q)$
T8: $\Diamond (p \wedge q) \equiv (\Diamond p \wedge \Diamond q)$

T9: $\Box q \supset (p \rightarrow q)$ T10: $\neg\Diamond q \supset (p \rightarrow q)$ Propiedades metalógicas de T:

T es consistente. T es decidible.
T es completo con respecto a los modelos-T.
T es una extensión propia y conservativa de LPC.
T no tiene leyes reductivas: hay infinitas modalidades normales no equivalentes entre sí.

S4

Agregando axiomas y propiedades a las relaciones de accesibilidad

S4 (A6) $\Box A \supset \Box\Box A$

Teoremas de S4:

(T1) $\Box A \equiv \Box\Box A$ (T2) $\Diamond A \equiv \Diamond\Diamond A$

(T3) $\Box\Diamond A \equiv \Box\Diamond\Box\Diamond A$

(T4) $\Diamond\Box A \equiv \Diamond\Box\Diamond\Box A$

S5

Agregando axiomas y propiedades a las relaciones de accesibilidad

(A6) $\Box A \supset \Box\Box A$
(A7) $\Diamond A \supset \Box\Diamond A$

Teoremas de S5:

(T1) $\Diamond A \equiv \Box\Diamond A$

(T2) $\Diamond A \equiv \Diamond\Diamond A$

(T3) $\Box A \equiv \Diamond\Box A$

(T4) $\Box A \supset \Box\Box A$

(T5) $\Box A \equiv \Box\Box A$

(T6) $\Diamond A \equiv \Diamond\Diamond A$

Relaciones de Accesibilidad

Los distintos sistemas reflejan distintas propiedades (restricciones a las relaciones de accesibilidad)

S5 (Reflexiva - Simétrica y Transitiva)

S4 (Reflexiva y Transitiva)

Menos restricciones (más libertades para construir modelos).

Modelos para lógicas modales

Los Sistema K con semántica de mundos posibles

Una interpretación es una estructura <W, R, v >

v_w (A) = 1 v_w (A) = 0

v_w (¬A) = 1 si v_w(A) = 0, y 0 en cualquier otro caso.
v_w(A ∧ *B)* = 1 si v_w(A) = v_w(B) = 1, y 0 en cualquier otro caso.
v_w(A ∨ *B)* = 1 si v_w(A) = 1 o v_w(B) = 1, y 0 en cualquier otro caso.

v_w(A ⊃ *B)* = 1 si v_w(A) = 0 o v_w(B) = 1, y 0 o en cualquier otro caso.
v_w(A ≡ *B)* = 1 si v_w(A) = v_w(B), y 0 en cualquier otro caso.

v_w(□A) = 1 si para todo *w′* ∈ *W* tal que *wRw′*, v_w' (A) = 1; y 0 en cualquier otro caso.

Representación de Modelos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & p & q \\
 & & & & w_2 & & \\
 & & & & & p \wedge q & \neg\Diamond q \\
 & & & \nearrow & & & \\
\neg p & \neg q & & & & & \\
 & & w_1 & & & & \\
\Diamond(p \wedge q) & \Diamond\Box p & & & & & \\
 & & & \searrow & \curvearrowright & & \\
 & & & & & p & \neg q \\
 & & & & w_3 & & \\
 & & & & & \Box p &
\end{array}$$

Modal Tableux: Reglas

$$\begin{array}{cc} \neg\Box A, i & \neg\Diamond A, i \\ \downarrow & \downarrow \\ \Diamond\neg A, i & \Box\neg A, i \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \Box A, i & \Diamond A, i \\ irj & \downarrow \\ \downarrow & irj \\ A, j & A, j \end{array}$$

Ejemplo de Prueba de Validez

$\Box(A \supset B) \land \Box(B \supset C) \vdash \Box(A \supset C).$

$$
\begin{array}{cr}
\Box(A \supset B) \land \Box(B \supset C), 0 & \\
\neg\Box(A \supset C), 0 & \\
\Box(A \supset B), 0 & \\
\Box(B \supset C), 0 & \\
\Diamond\neg(A \supset C), 0 & \\
0r1 & (1) \\
\neg(A \supset C), 1 & (1) \\
A, 1 & \\
\neg C, 1 & \\
A \supset B, 1 & (2) \\
B \supset C, 1 & (2)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \swarrow & & \searrow & \\
\neg A, 1 & & & B, 1 & \\
\times & & & \downarrow & \searrow \\
 & & & \neg B, 1 & C, 1 \\
 & & & \times & \times
\end{array}
$$

Metafísica de la modalidad

¿Qué es un mundo posible?

¿En qué mundo estamos? ¿Qué caracteriza al mundo actual?

¿Qué quiere decir que un mundo es accesible desde otro?

Lecturas

Cap. 2 de Priest *Intro. to non-classical Logic*

Ficha de cátedra