# El concepto de verdad y las lógicas no clásicas

Lucas Rosenblatt
(l_rosenblatt@hotmail.com)
UBA y Conicet

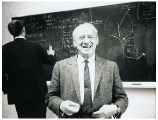
Marzo, 2016

# La importancia de la noción de verdad

- En la *epistemología*: el conocimiento como creencia *verdadera* justificada.
- En la *filosofía de la ciencia*: las teorías científicas hacen predicciones correctas porque son (al menos parcialmente) *verdaderas*.
- En la *filosofía del lenguaje*: El significado de una oración está dado por sus condiciones de *verdad*.
- En la *filosofía de la lógica*: Un argumento es válido sólo si la *verdad* de las premisas se preserva en la conclusión.
- Etc.

# ¿Qué principios obedece la noción de verdad?

- Los empiristas lógicos y los trabajos de Alfred Tarski en la década del 30'.



- Tarski propuso la siguiente condición de adecuación para toda definición del predicado veritativo:
  - *Esquema T* ‘*A*’ es verdadera si y sólo si *A*.

# ¿Qué principios obedece la noción de verdad?

- El enfoque sintáctico:

$$Tr\text{-intro}\ \frac{A}{\text{`}A\text{' } \textit{es verdadera}} \qquad\qquad Tr\text{-elim}\ \frac{\text{`}A\text{' } \textit{es verdadera}}{A}$$

- El enfoque semántico: El valor semántico de la oración '$A$' *es verdadera* es idéntico al valor semántico de la oración $A$.
- Si la oración '$A$' *es verdadera* es equivalente a la oración $A$, ¿para qué necesitamos el predicado $Tr(x)$? El predicado $Tr(x)$ cumple un rol expresivo.
  - Cuantificaciones infinitas.
    - *Todos los teoremas de la aritmética son verdaderos*
  - Adscripciones de verdad ciegas.
    - *Todo lo que va a decir Diego mañana es verdadero*

# Las paradojas semánticas

- Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \exists, \forall\}$ que contiene nombres para sus propias oraciones y sea $\mathcal{L}_{Tr}$ el resultado de extender $\mathcal{L}$ con el predicado $Tr(x)$.
- Si $A$ es una oración de $\mathcal{L}_{Tr}$, diremos que $\langle A \rangle$ es una constante de individuo (i.e. un nombre) que denota la oración $A$.
- Desde un punto de vista intuitivo, entonces, $Tr\langle A \rangle$ expresa la idea de que $A$ es una oración verdadera.
- *El problema*: $Tr$-intro y $Tr$-elim son conjuntamente incompatibles con la lógica clásica si el lenguaje que utilizamos tiene los recursos expresivos mencionados más arriba.
- La oración del mentiroso:

$$\lambda := \neg Tr\langle \lambda \rangle.$$

- Intuitivamente, esta oración es falsa si es verdadera, y es verdadera si es falsa.

# La derivación formal

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \vee \neg \mathit{Tr}\langle\lambda\rangle$ | Ley de tercero excluido |
| 2 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle$ | Supuesto |
| 3 | $\lambda$ | *Tr*-elim |
| 4 | $\neg \mathit{Tr}\langle\lambda\rangle$ | Def. $\lambda$ |
| 5 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \wedge \neg \mathit{Tr}\langle\lambda\rangle$ | $\wedge$-intro |
| 6 | $\neg \mathit{Tr}\langle\lambda\rangle$ | Supuesto |
| 7 | $\lambda$ | Def. $\lambda$ |
| 8 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle$ | *Tr*-intro |
| 9 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \wedge \neg \mathit{Tr}\langle\lambda\rangle$ | $\wedge$-intro |
| 10 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \wedge \neg \mathit{Tr}\langle\lambda\rangle$ | Razonamiento por casos |
| 11 | Donald Trump es una gran persona | Explosión |

# El argumento semántico

- También podemos obtener una contradicción semánticamente a partir de $\lambda$:

  Sea $v$ una valuación clásica. Por definición
  $v(\lambda) = v(\neg Tr\langle\lambda\rangle)$.
  Ahora bien, por el significado de $Tr$
  $v(Tr\langle\lambda\rangle) = v(\lambda)$.
  Juntando estas dos cosas, inferimos
  $v(Tr\langle\lambda\rangle) = v(\neg Tr\langle\lambda\rangle)$.
  Sin embargo, por la cláusula semántica para $\neg$, tenemos:
  $v(\neg Tr\langle\lambda\rangle) = 1 - v(Tr\langle\lambda\rangle)$.
  Luego, obtenemos:
  $v(Tr\langle\lambda\rangle) = 1 - v(Tr\langle\lambda\rangle)$.
  Desafortunadamente, esto quiere decir que $v(Tr\langle\lambda\rangle) = 1$ si y sólo si $v(Tr\langle\lambda\rangle) = 0$, lo cual implica una contradicción.

Clarín

Un toque de atención para la solución argentina de los problemas argentinos

Martes 2.02.2016

BUENOS AIRES, ARGENTINA - PRECIO: $ 17,00

Viene Nadal

**Para el ATP porteño**

Será la gran figura del torneo, que arrancará el próximo lunes. P.52

**Nacional Rock**

Bobby Flores, el nuevo director, le anticipó a Clarín sus planes para la FM. P.44

# Clarín miente

**Así lo informaron, al cierre de esta edición, fuentes oficiales a Clarín. Se confirma entonces que lo expresado por el ex presidente Nestor Kirchner en el año 2009 era cierto y que todas las noticias publicadas por este medio son falsas.**

Tema del día

**Violencia entre los jugadores: el Gobierno pide castigos**

Tras los escándalos en Estudiantes-Gimnasia y Boca-River le reclamó a la AFA que aplique fuertes sanciones a los implicados. P.3

Los nuevos costos bimestrales

| Consumo de 299 kWh | | Consumo de 799 kWh | | Consumo de 999 kWh | | Consumo de 1399 kWh | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ANTES | AHORA | ANTES | AHORA | ANTES | AHORA | ANTES | AHORA |
| $ 41 | $ 236 | $ 92 | $ 585 | $ 126 | $ 773 | $ 308 | $ 1.313 |

Consejos

Las claves para bajar el consumo de electricidad

Además...

**Atropelló, mató y le echó la culpa a su hijo de 15 años**

Fue en Berisso. La mujer arrolló a un ciclista, se escapó del lugar y después dijo que el menor le había robado el auto. LA CIUDAD P.38

**Alerta mundial: la OMS declaró la emergencia por el zika**

**Peligro.** La Organización Mundial de la Salud sospecha que el virus es la causa de la multiplicación de malformaciones congénitas en América latina. Los ministros de la región se reúnen mañana para avanzar en el desarrollo de una vacuna. P.28

Hubo 11 heridos

**Denuncian represión a una murga de chicos**

Fue durante un operativo de Gendarmería en la villa 1-11-14 del Bajo Flores. POLICIALES P.40

Sospechan de un suicidio

**Apareció muerto el mejor chef del mundo**

Es el multipremiado suizo Benoît Violier, de 44 años, dueño del restaurante "L'Hôtel de Ville". SOCIEDAD P.33

REPUBLICA ARGENTINA, AÑO LXXI N° 25.198 - RECARGO ENVIO AL INTERIOR: $ 2,00 - URUGUAY: $ 50,00 - BRASIL: R$ 7,00 - PRECIOS DE OPCIONALES, EN LA PAGINA 62

# Otras paradojas

- El argumento del mentiroso no es el único en su género.
  - $\lambda_1 :=$ '$\lambda_2$' es falsa. $\lambda_2 :=$ '$\lambda_1$' es verdadera.
  - O la oración que está en el tercer ítem de esta diapositiva es falsa o Donald Trump es una gran persona.
  - 1. Todas las oraciones que están abajo son falsas.
    2. Todas las oraciones que están abajo son falsas.
    3. Todas las oraciones que están abajo son falsas.
    4. .....
    5. .....

# La resistencia clásica

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \vee \neg Tr\langle\lambda\rangle$ | Ley de tercero excluido |
| 2 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle$ | Supuesto |
| 3 | $\lambda$ | *Tr*-elim |
| 4 | $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ | Def. $\lambda$ |
| 5 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \wedge \neg Tr\langle\lambda\rangle$ | $\wedge$-intro |
| 6 | $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ | Supuesto |
| 7 | $\lambda$ | Def. $\lambda$ |
| 8 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle$ | *Tr*-intro |
| 9 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \wedge \neg Tr\langle\lambda\rangle$ | $\wedge$-intro |
| 10 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \wedge \neg Tr\langle\lambda\rangle$ | Razonamiento por casos |
| 11 | Donald Trump es una gran persona | Explosión |

# La resistencia clásica

- *Objeción*
  - La oración $\lambda$ es artificial y por ende debe prohibirse sintácticamente.
- *Réplica I*
  - Si las circunstancias empíricas son desfavorables, es posible que haya paradojas en contextos mundanos.
  - La única oración roja de esta diapositiva es falsa.
- *Réplica II*
  - Es posible construir una oración como $\lambda$ en la aritmética gracias al lema de diagonalización.

# La resistencia clásica

- *Objeción*
  - La oración $\lambda$ es artificial y por ende debe prohibirse sintácticamente.
- *Réplica I*
  - Si las circunstancias empíricas son desfavorables, es posible que haya paradojas en contextos mundanos.
  - La única oración roja de esta diapositiva es falsa.
- *Réplica II*
  - Es posible construir una oración como $\lambda$ en la aritmética gracias al lema de diagonalización.

# La resistencia clásica

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \vee \neg Tr\langle\lambda\rangle$ | Ley de tercero excluido |
| 2 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle$ | Supuesto |
| 3 | $\lambda$ | *Tr*-elim |
| 4 | $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ | Def. $\lambda$ |
| 5 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \wedge \neg Tr\langle\lambda\rangle$ | $\wedge$-intro |
| 6 | $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ | Supuesto |
| 7 | $\lambda$ | Def. $\lambda$ |
| 8 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle$ | *Tr*-intro |
| 9 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \wedge \neg Tr\langle\lambda\rangle$ | $\wedge$-intro |
| 10 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \wedge \neg Tr\langle\lambda\rangle$ | Razonamiento por casos |
| 11 | Donald Trump es un buen tipo | Explosión |

# La resistencia clásica

- *Objeción*
- Lo que el argumento muestra es que falla *Tr*-elim y/o *Tr*-intro. Siguiendo a Quine (1970, p.147) podemos decir que

> *La lógica clásica de las funciones veritativas y de la cuantificación está exenta de paradojas y es, dicho sea de paso, un paradigma de claridad, elegancia y buen funcionamiento. Las paradojas no se presentan sino cuando se entra en el terreno de la teoría de conjuntos y en el de la semántica general. Intentemos, puess, resolverlas en el marco de la teoría de conjuntos y de la semántica, en vez de seguir la tala también por el territorio, más seguro, de la lógica pura.*

# La resistencia clásica

- *Réplica I*
  - La lógica clásica no ofrece un tratamiento unificado de las paradojas autorreferenciales! Por ejemplo, las paradojas de la teoría de conjuntos se resuelven de forma diferente que las paradojas semánticas.
- *Réplica II*
  - El argumento de McGee. Existen conjuntos máximamente consistentes de instancias del *Esquema T* pero que son mutuamente incompatibles.

# El enfoque no clásico

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \vee \neg Tr\langle\lambda\rangle$ | Ley de tercero excluido |
| 2 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle$ | Supuesto |
| 3 | $\lambda$ | *Tr*-elim |
| 4 | $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ | Def. $\lambda$ |
| 5 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \wedge \neg Tr\langle\lambda\rangle$ | $\wedge$-intro |
| 6 | $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ | Supuesto |
| 7 | $\lambda$ | Def. $\lambda$ |
| 8 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle$ | *Tr*-intro |
| 9 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \wedge \neg Tr\langle\lambda\rangle$ | $\wedge$-intro |
| 10 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \wedge \neg Tr\langle\lambda\rangle$ | Razonamiento por casos |
| 11 | Donald Trump es una gran persona | Explosión |

# El enfoque no clásico

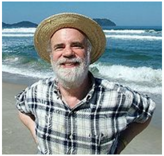
- Podemos bloquear la derivación utilizando la lógica intuicionista?

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle$ | Supuesto |
| | 2 | $\lambda$ | *Tr*-elim |
| | 3 | $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ | Def. $\lambda$ |
| | 4 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \wedge \neg Tr\langle\lambda\rangle$ | $\wedge$-intro |
| No... | 5 | $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ | *Reductio* |
| | 6 | $\lambda$ | Def. $\lambda$ |
| | 7 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle$ | *Tr*-intro |
| | 8 | $\mathrm{Tr}\langle\lambda\rangle \wedge \neg Tr\langle\lambda\rangle$ | $\wedge$-intro |
| | 9 | Donald Trump es una gran persona | Explosión |

- La derivación de arriba es válida en la lógica intuicionista. La versión de *Reductio* usada es legítima.

# El enfoque no clásico

- Hay otras formas de rechazar el principio de tercero excluido: $A \vee \neg A$.
- El primero en tomarse seriamente el proyecto de dar una teoría no clásica de la verdad fue Saul Kripke en su clásico *Outline of a theory of truth* (1975).



- Las teorías ofrecidas por Kripke son llamadas teorías de punto fijo. En ellas, el valor de $A$ es idéntico al valor de $A$ *es verdadera*.
- Lógicas multivaluadas. En estas lógicas hay más de dos categorías semánticas.
- Consideraremos dos lógicas trivalentes que no respetan este principio: la lógica de *Kleene débil WK*, la lógica de *Kleene fuerte SK*.

# El enfoque no clásico

- La lógica de Kleene débil *WK*.
- Un posible diagnóstico para las oraciones paradójicas es que son oraciones carentes sentido. En otras palabras, son oraciones que no expresan una proposición.
- En este sentido se asemejan a oraciones como *ideas verdes incoloras duermen furiosamente*.
- Sea $\mathcal{V} = \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ el conjunto de valores semánticos.
- El valor $\frac{1}{2}$ se interpreta como *carente de sentido*.

# El enfoque no clásico

- Las tablas de verdad para la negación, la conjunción y la disyunción son las siguientes:

| | $\neg$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 |

| $\vee$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |

| $\wedge$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 |

- El valor $\frac{1}{2}$ es 'infeccioso'.
- La oración del mentiroso $\lambda$ recibe por supuesto el valor $\frac{1}{2}$. Esto no genera problemas, ya que el valor de $Tr\langle\lambda\rangle$ puede ser igual al de $\neg Tr\langle\lambda\rangle$.
- $\not\models A \vee \neg A$ y $A \not\models A \vee B$.

# El enfoque no clásico

- La segunda lógica que consideraremos es la lógica de Kleene fuerte $SK$.
- En esta lógica las oraciones paradójicas sí expresan una proposición, pero dicha proposición no es ni verdadera ni falsa.
- Sea $\mathcal{V} = \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ el conjunto de valores semánticos.
- El valor $\frac{1}{2}$ se interpreta como *ni verdadero ni falso*, donde esto puede considerarse como un valor extra o como la ausencia de un valor.

# El enfoque no clásico

- Las tablas de verdad para la negación, la disyunción y el condicional son las siguientes:

| | $\neg$ |
|---|---|
| $1$ | $0$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $0$ | $1$ |

| $\vee$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $\frac{1}{2}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $0$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

| $\wedge$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |

| $\rightarrow$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\frac{1}{2}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $0$ | $1$ | $1$ | $1$ |

- Al igual que antes, la oración $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ recibe el valor $\frac{1}{2}$.
- $A \vDash A \vee B$, $\nvDash A \vee \neg A$ y $\nvDash A \rightarrow A$.
- De hecho, $SK$ no tiene teoremas!

# El enfoque no clásico

- Las tablas de verdad para la negación, la disyunción y el condicional son las siguientes:

| | $\neg$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 |

| $\vee$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |

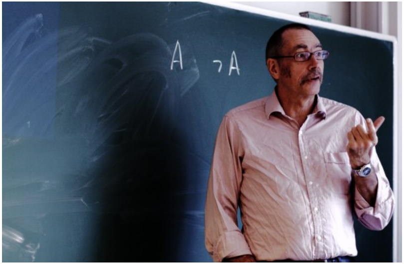
| $\wedge$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

| $\rightarrow$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | 1 | 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 | 1 | 1 |

- Al igual que antes, la oración $\lambda$ recibe el valor $\frac{1}{2}$.
- $A \models A \vee B$, $\not\models A \vee \neg A$ y $\not\models A \rightarrow A$.
- De hecho, $SK$ no tiene teoremas!
- Sea $\kappa$ la oración $Tr\langle\kappa\rangle \rightarrow \lambda$.

# El enfoque no clásico

- Graham Priest ha argumentado durante las últimas tres décadas que hay un diagnóstico diferente disponible para las oraciones paradójicas como $\lambda$.




- Las oraciones paradójicas son verdaderas y falsas.
- Por ende, para bloquear la derivación presentada anterioremente, debemos rechazar la regla de Explosión, según la cual $A \wedge \neg A$ implica $B$.

- La lógica empleada por Priest tiene las mismas tablas de verdad que $SK$.
- Pero el valor intermedio $\frac{1}{2}$ adquiere una interpretación diferente. Si $A$ tiene ese valor, decimos que $A$ es verdadera y falsa a la vez.
- Lo que cambia en relación a $SK$ es la definición de validez. Un argumento es válido en $SK$ si y sólo si simpre que las premisas sean verdaderas, la concluisión es verdadera. Un argumento es válido en $LP$ si y sólo si siempre que la conclusión sea estrictamente falsa, alguna de las premisas es estrictamente falsa.
- Una propiedad interesante de $LP$ es sus teoremas son los mismos que los teoremas clásicos.
- Un problema, sin embargo, es que $A, A \rightarrow B \not\models B$!

# El enfoque no clásico

- Hay lógicas con más de tres valores de verdad que sean inmunes a las paradojas semánticas?
- La lógica de *first degree entailment FDE*.
- La lógica de Łukasiewicz $Ł_\infty$.
- Etc.

# El enfoque no clásico

- Hay otras alternativas que no consideré.
- Supervaluacionismo.
- Lógicas subestructurales.

# Bibliografía


1. A. Tarski, *Logic, Semantics Metamathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1956.
2. W. Quine, *Philosophy of Logic*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1970.
3. S. Kripke, Outline of a theory of truth, *Journal of Philosophy* 72(19), pp.690-716", 1975.
4. G. Priest, *In Contradiction*, 2da edición, Oxford University Press, Oxford, 2006.