¿Debemos abandonar la lógica clásica?

Diego Tajer

Escuela de Verano de Lógica 2016

Objetivos

- Exploraré diversas razones metafísicas y epistémicas para abandonar la lógica clásica.
- En algunos casos, estas razones han motivado el desarrollo de lógicas *complementarias*, que validan los teoremas clásicos pero también otros con nuevas constantes.

Paradoja del montón (*sorites*)

- Originalmente (Grecia antigua):
  - Tengo un montón de arena.
  - Si a un montón de arena le saco un granito, seguirá siendo un montón de arena.
  - Pero puedo sacar granitos uno a uno.
  - Entonces llegaré a sacar todos los granitos y tendré un montón de arena!

Versión moderna

- El pelado:
  - Una persona sin pelos es pelado.
  - Si una persona es pelada, y le agregás un pelo, sigue siendo pelado.
  - Por lo tanto, si le agregás *n* pelos, es pelado.
  - Entonces con 10000000 de pelos es pelado!

Formalmente

- Argumento:
  - P(0)
  - $\forall n(P(n) \rightarrow P(n+1))$ [Tolerancia]
  - Por lo tanto, $P(10000000)$

Soluciones paracompletas y paraconsistentes

Casos claros de pelado | *m* Casos problemáticos | *n* | Casos claros de no-pelado

- – PARACONSISTENTE: En puntos entre *m* y *n*, el individuo es *pelado y no pelado*. Tolerancia siempre vale pero no así Modus Ponens para $P(n) \rightarrow P(n+1)$.
- – PARACOMPLETO: En puntos entre *m* y *n*, el individuo es *ni pelado ni no-pelado*. Entonces $P(m) \rightarrow P(m+1)$ no es verdadero (ni falso),

• PROBLEMA: ¿Cómo establezco los límites *m* y *n*? Parece volver el problema original

Lógica difusa

- La lógica difusa tiene infinitos valores de verdad, los reales entre 0 y 1, es decir [0,1]
- Entonces, con cada pelo nuevo, el individuo es menos pelado. Por ejemplo, P(0)=1, P(1)=0,99 … P(200000)=0,25; P(20000000)=0.

Semántica de la lógica difusa de Lukasiewicz

- $V(A \land B) = \min(A,B)$
- $V(A \lor B) = \max(A,B)$
- $V(\neg A) = 1 - A$
- $V(A \rightarrow B)=$
  - 1 cuando $v(A) \leq v(B)$
  - $1 - (A - B)$ cuando $v(A) > v(B)$

(En valores 0 y 1, es como la clásica)

- Validez:
  - $\Gamma \vDash_{FL} \phi$ sii para toda v, $v(\land\Gamma) \leq v(\phi)$

Ejemplos

- $A \models_{FL} A \lor B$
- Pero $p \not\models_{FL} q \lor \neg q$, porque existe v tal que $v(p)=1$ y $v(q)=.5$, entonces $v(q \lor \neg q)=.5$
- VIRTUDES: En sorites, P(n) → P(n+1) tiene el mismo valor (cercano a 1) en todos los casos.
- PROBLEMA: Cuando v(p)=.5, vale lo mismo $p\land \neg p$ que $p \lor \neg p$. Pero al menos intuitivamente, una es una contradicción y la otra es una tautología.

Argumentos epistémicos

- (Bueno y Shalkowski 2009)

Si digo “no estoy seguro que Boca no va a ganar”, no quiero decir que “estoy seguro que Boca va a ganar”. Por ende, en contextos epistémicos la doble negación no vale (y debemos usar lógica intuicionista).

- Pero NO HACE FALTA!

Lógica Modal

- Agrego el operador K, donde Kp significa “*s* conoce *p*”.
- La lógica K (lógica modal básica) se define con dos axiomas:
  - Si A es teorema, KA es teorema. [NEC]
  - K(A&B) → (K(A)&K(B)) [DIST]
- Con esto no llego a caracterizar el conocimiento, porque si *s* conoce *p*, entonces *p* es verdadera. Y eso no puedo probarlo en K.

Lógica epistémica

- Entonces agrego T, logrando la lógica KT:

$Kp \rightarrow p$ [T]

T nos dice que el conocimiento es *factivo*.

- Usualmente se agrega otra cosa, logrando S4:

$Kp \rightarrow KKp$ [4]

4 nos dice que si sabemos algo, sabemos que lo sabemos (*transparencia*). ¿Esto es cierto?

Algunos teoremas de S4

Algunos Teoremas

1. $K(p \rightarrow q), p \vDash_{S4} q$
2. $K(p \wedge q), KK(q) \rightarrow r \vDash_{S4} r$

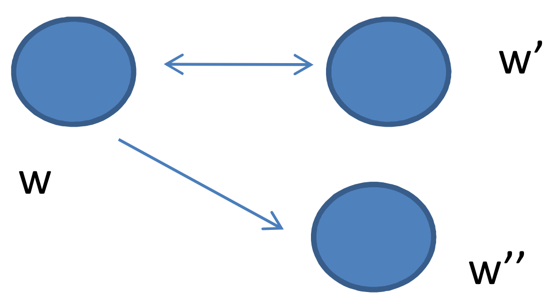
En ocasiones agregamos 5 o "sabiduría":

$\neg Kp \rightarrow K\neg Kp$ [5]

Cuando no sabemos algo, ¿sabemos que no lo sabemos? En teoría de juegos se asume que sí. En la vida real parece que no.

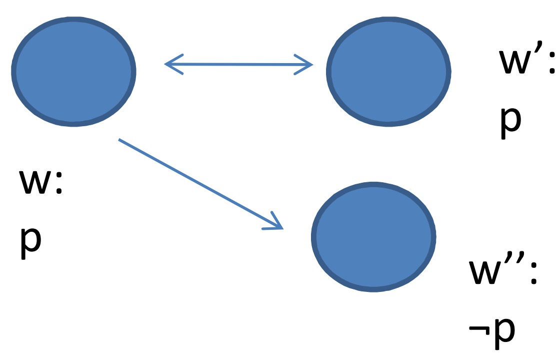
Semántica de la lógica modal

- Naturalmente, K no es un operador veritativo funcional. Si v(p)=1, v(Kp) podría ser 0 o 1 (podemos ignorar o conocer verdades).
- Se usa un marco *modal*, donde hay un conjunto de mundos W y una relación R de accesibilidad.



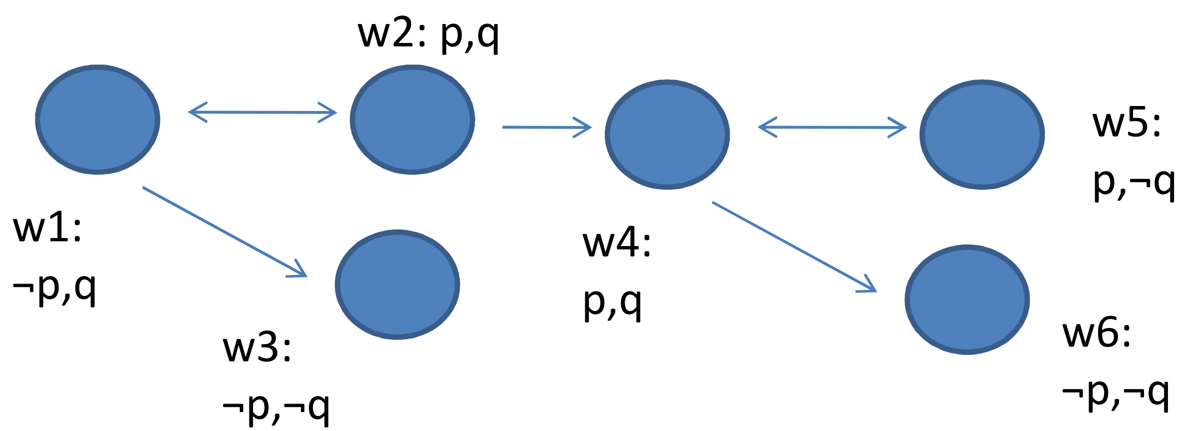
Semántica modal

- La valuación es siempre relativa a un mundo. Decimos que $v_x(Kp)=1$ sii para todo *y* tal que xRy, sucede que $v_y(p)=1$
- Por ejemplo, en este caso $v_w(Kp)=0$, pero $v_{w'}(Kp)=1$ y $v_{w'}(KKp)=0$. Y $v_{w''}(Kp)=1$!



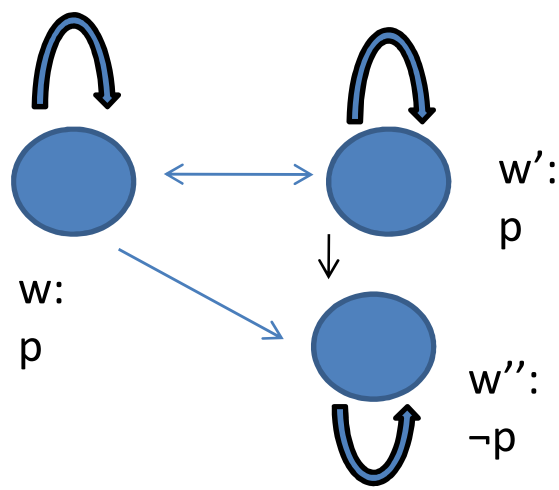
Un ejemplo

- Aquí, $v_{w2}(K(p \& q))=1$
- $v_{w1}(K(p \vee q))=0$
- $v_{w4}(K(p \vee \neg q))=1$
- Etc.



Reglas semánticas para K

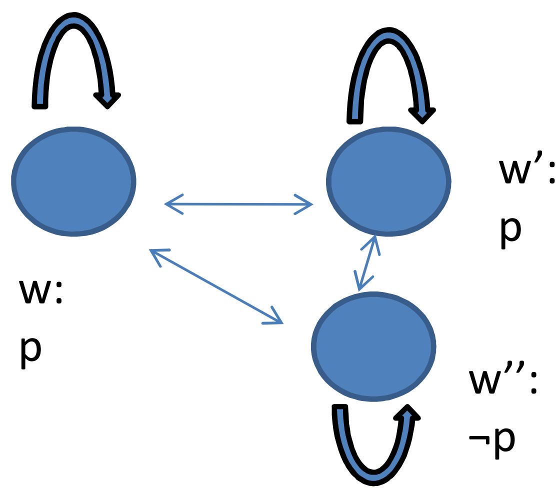
- En lógica epistémica, se agregan dos cláusulas semánticas correspondientes a T y 4:
  - Reflexividad: para todo x, xRx
  - Transitividad: si xRy y yRz, entonces xRz.



Ahora, $v_{w'}(Kp)=0$ y $v_{w'}(Kp)=0$.

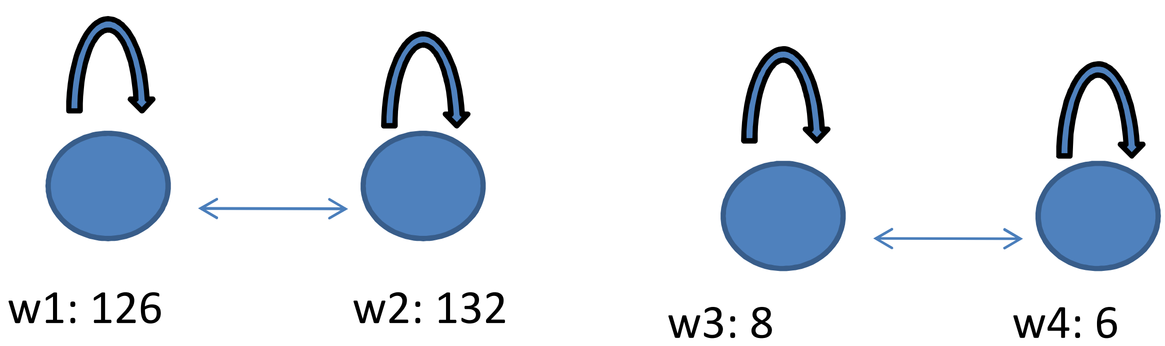
El extremo: S5

- El axioma 5 exige que los modelos sean simétricos: si xRy entonces yRx. El anterior modelo quedaría así:



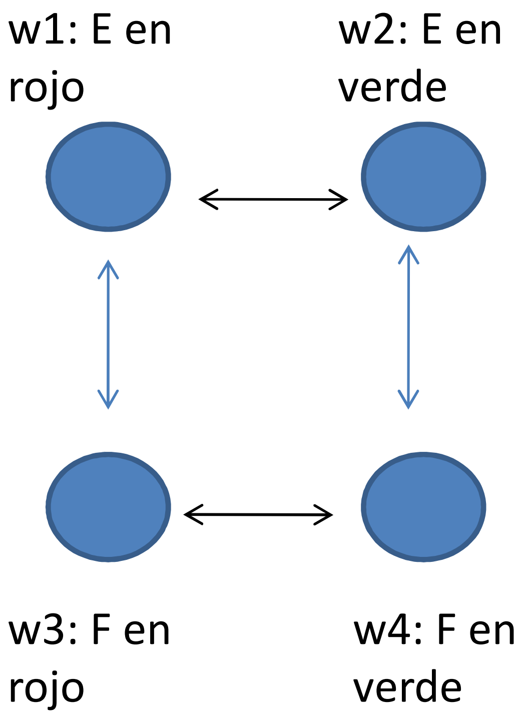
S5 y el conocimiento

- Esto no significa que en S5 todo mundo se conecta con todo mundo. Supongamos que estoy esperando el colectivo y soy miope. A lo lejos lo veo venir. Puede ser el 132, el 126, el 8 o el 6.



S5 con varios agentes

- Juan (negro) es daltónico, y María (azul) es miope. Hay 4 letras posibles:



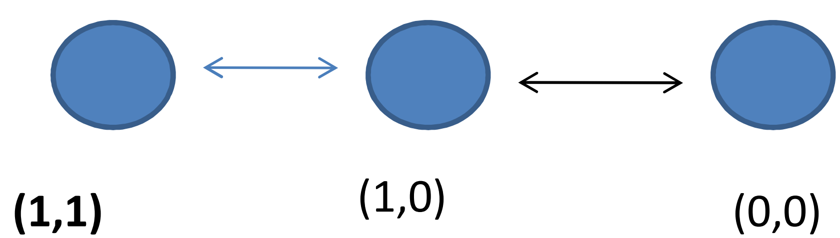
- ¿Qué sabe cada uno en cada mundo?
- ¿Cómo sería el esquema para un ciego?

Conocimiento grupal y colectivo

- Con varios individuos, podemos diferenciar conocimiento grupal y colectivo:
- Conocimiento grupal: todos saben que *p.* (En el ejemplo anterior, *no* hay conocimiento grupal de la letra o la figura)
- Conocimiento colectivo: todos saben que todos saben que todos saben… que *p*.
- En un marco modal, el conocimiento colectivo de *p* existe cuando a partir de *cualquier camino* (usando cualquier flecha) llego a *p*.

Conocimiento colectivo

- María y Julia reciben un código, que es 11, 10 o 00. María (azul) ve el primer número y Julia (negro) el segundo. Supongamos que reciben **11**. María sabe que el código es 11 o 10. Julia sabe que es el 11 o 10. Pero María no sabe que Julia sabe que es el 11 o 10. Es decir, hay conocimiento grupal pero no colectivo. ¿Por qué?



Racionalidad grupal

- Como frutilla del postre:
- Otras nociones epistémicas grupales: Si los individuos de un grupo creen cosas distintas ¿cómo deberían ponerse de acuerdo?
  - Unanimidad ➔ Debilidad y veto constante.
  - Dictadura ➔ Sólo un individuo pesa.
  - Mayoría ➔ Debería funcionar!!

Paradoja discursiva

	p	q	p&q
Gabriela	sí	sí	Sí
Juan	no	sí	No
José	sí	no	No
MAYORÍA	SI	SI	NO

Sorprendentemente, un grupo de agentes que votan de manera inconsistente obtienen un voto mayoritario inconsistente! ¿QUÉ HACER? Eso estudia la teoría de Agregación de Juicios.

Argumentos sobre el futuro y el pasado

- **Lukasiewicz**: el futuro no está determinado. Hoy, no es verdadero que en 100 años habrá una guerra. Tampoco es verdadero que no la habrá. Entonces, deberíamos usar una lógica trivaluada para estos casos.
- Lo mismo se aplica al pasado:

El pasado, según Lukasiewicz <3

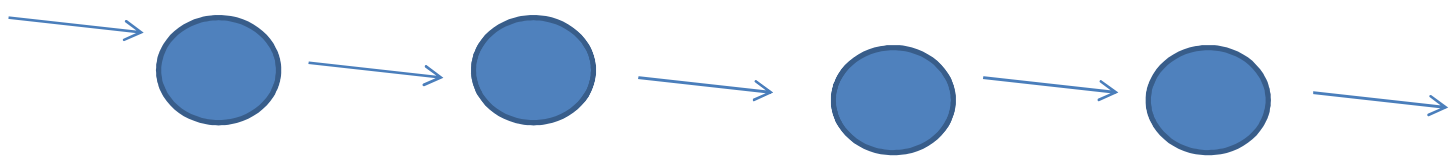
En cuanto al pasado, no debiéramos tratarlo de modo distinto que el futuro. Si la única parte del futuro que es real ahora es aquella que está causalmente determinada por el instante presente, y si las cadenas causales que comienzan en el futuro pertenecen al reino de la posibilidad, entonces sólo las partes del pasado que continúan teniendo efectos hoy son reales en el momento presente. Los hechos cuyos efectos han desaparecido totalmente, y que ni siquiera una mente omnisciente podría inferir de los que están ocurriendo ahora, pertenecen al reino de la posibilidad. De ellos no se puede decir que tuvieron lugar, sino sólo que fueron *posibles*. Es bueno que ello deba ser así. Hay momentos difíciles de sufrimiento y momentos, todavía más difíciles, de culpa en la vida de todo el mundo. Deberíamos sentirnos felices de borrarlos no sólo de nuestra memoria, sino también de la existencia. Cabe creer que cuando todos los efectos de estos momentos nefastos se hayan agotado, incluso aunque ello suceda sólo *después* de nuestra muerte, entonces también sus causas serán borradas del mundo de la realidad y pasarán al reino de la posibilidad. El tiempo calma nuestros cuidados y nos trae el perdón.

La lógica modal temporal de Prior

- Prior mostró que los argumentos sobre el pasado y el futuro pueden capturarse mejor en una lógica estilo modal:
  - Pp significa “sucedió p”
  - Fp significa “va a suceder p”
  - Hp significa “siempre en el pasado sucede p”
  - Gp significa “siempre en el futuro sucede p” (por ejemplo: siempre en el futuro ya pasó 2014)

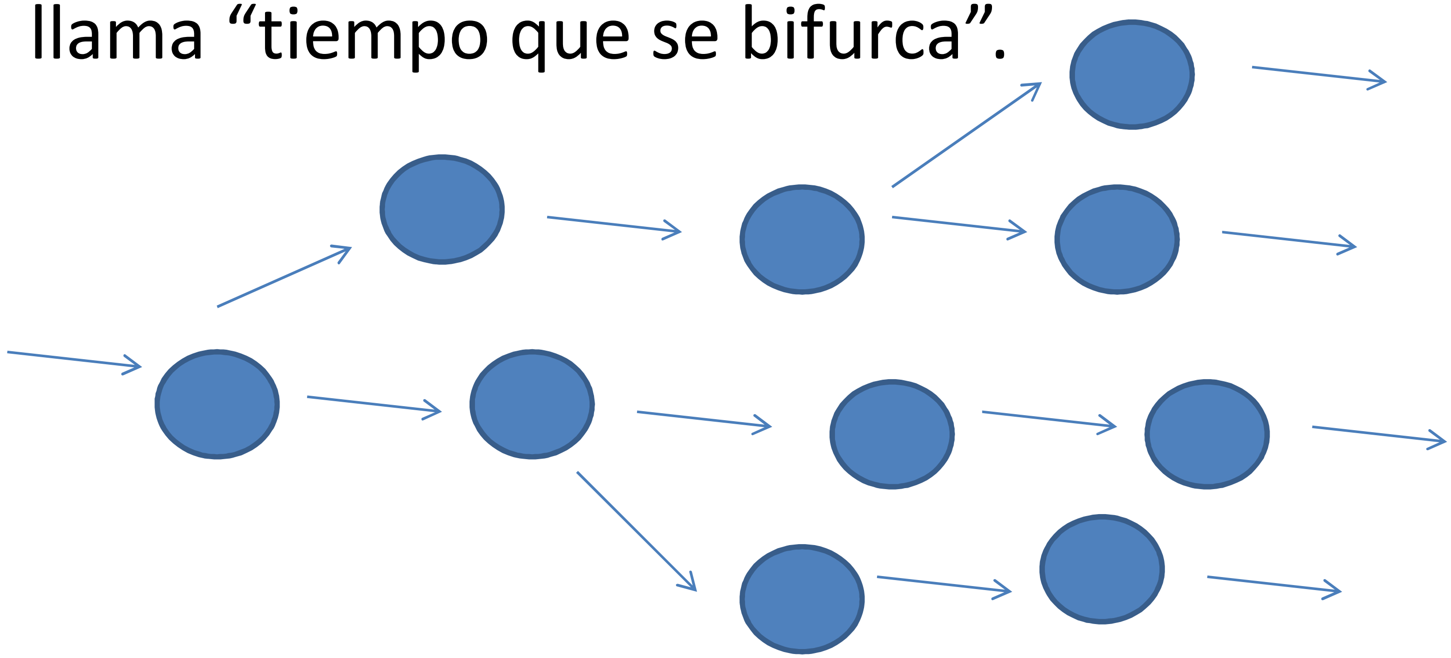
Semántica modal de Prior

- Aquí, cada “mundo” es un instante temporal, o un momento. La relación es “x viene antes de y”. En un momento determinado, la proposición “Carlos tiene 8 años” es verdadera; en otro momento, ya no. Así sería el escenario determinista:



Determinismo e indeterminismo

- El escenario indeterminista es distinto. A veces se llama “tiempo que se bifurca”.



- Esto representa que puede pasar una cosa u otra.

Algunas verdades lógicas de la lógica temporal

- $p \rightarrow HPp$

Si sucede p, siempre en el futuro habrá sucedido p

- $p \rightarrow GFp$

Si sucede p, siempre en el pasado va a suceder p

Algunas preguntas sobre los modelos

- ¿Es necesario que el orden sea infinito? (es decir, podría haber un inicio o final del tiempo)
- ¿Debería ser denso el orden (i.e. entre dos instantes siempre hay otro instante)?

Conclusión

- Recorrimos algunos motivos metafísicos y epistémicos para cambiar la lógica:
  - Paradoja de Sorites: Vimos la paradoja, las principales soluciones y algo de lógica difusa.
  - Vacíos epistémicos: Vimos algunos rudimentos de lógica epistémica individual y grupal, y algunas paradojas de la racionalidad grupal.
  - Pasado y futuro: Vimos los argumentos de Lukasiewicz y la lógica temporal de Prior.

Conclusión (2)

- Si podemos sacar una moraleja es la siguiente: Los argumentos metafísicos o epistémicos para cambiar la lógica tienen que ser *muy* fuertes. En particular, sólo es posible cambiar la lógica si hemos agotado toda aproximación razonable al fenómeno en lógica clásica.