Secuentes para la lógica proposicional

Conclusiones singulares y conclusiones múltiples

- Un conjunto de fórmulas Γ *implica* una fórmula D si toda interpretación que hace verdadera a cada fórmula de Γ hace verdadera a D.
- Un conjunto de fórmulas Γ *implica* un conjunto de fórmulas Δ si toda interpretación que hace verdadera a cada fórmula de Γ hace verdadera a *alguna* fórmula de Δ.
- Si entendemos el conjunto de premisas de manera conjuntiva, debemos entender el conjunto de conclusiones de manera disyuntiva.

Secuentes

- Un *secuente* es un objeto de la forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$ donde Γ y Δ son colecciones de fórmulas. Γ es el *antesecuente* y Δ es el *postsecuente*.
- Una lectura intuitiva para $\Gamma \Rightarrow \Delta$: si acepto todas las fórmulas de Γ, no puedo rechazar todas las fórmulas de Δ. Esto es equivalente a la siguiente lectura disyuntiva: o rechazo alguna fórmula de Γ o acepto alguna fórmula de Δ.
- En consecuencia, $\Rightarrow A$ expresa la idea de que A debe aceptarse y $A \Rightarrow$ expresa la idea de que A debe rechazarse.
- Si Γ y Δ son colecciones finitas $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ y $\{\delta_1, ..., \delta_m\}$, podemos leer $\Gamma \Rightarrow \Delta$ como $\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \rightarrow \delta_1 \vee ... \vee \delta_m$.

El sistema

Definición El sistema LK para la lógica proposicional contiene los siguientes secuentes iniciales (axiomas) y las siguientes reglas (Γ, Δ, Π y Σ son multiconjuntos de fórmulas):

Secuentes iniciales

$$\text{Ax}\,\frac{}{A \Rightarrow A}$$

Reglas estructurales

$$Corte\,\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Pi, A \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$\text{L}W\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}W\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}$$

$$\text{L}C\,\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}C\,\frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}$$

Reglas operacionales

$$\text{L}\neg\,\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg\,\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta}$$

$$\text{L}\vee\,\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Pi, B \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, A \vee B \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \text{R}\vee\,\frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta}$$

$$\text{L}\wedge\,\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\wedge\,\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Pi \Rightarrow B, \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow A \wedge B, \Delta, \Sigma}$$

$$\text{L}\supset\,\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Pi, B \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, A \supset B \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \text{R}\supset\,\frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \supset B, \Delta}$$

Algunos ejemplos

$$\mathrm{R}\vee\,\dfrac{\mathrm{R}\neg\,\dfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A, \neg A}}{\Rightarrow A \vee \neg A}$$

$$\mathrm{R}\supset\,\dfrac{\mathrm{R}\!\rightarrow\,\dfrac{\mathrm{L}W\,\dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}}{A \Rightarrow B \supset A}}{\Rightarrow A \supset (B \supset A)}$$

$$\mathrm{R}\supset\,\dfrac{\mathrm{R}C\,\dfrac{\mathrm{L}\supset\,\dfrac{\mathrm{R}\!\rightarrow\,\dfrac{\mathrm{R}W\,\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A, B}}{\Rightarrow A, A \supset B} \qquad A \Rightarrow A}{(A \supset B) \supset A \Rightarrow A, A}}{(A \supset B) \supset A \Rightarrow A}}{\Rightarrow ((A \supset B) \supset A) \supset A}$$

$$\mathrm{R}\supset\,\dfrac{\mathrm{L}C\,\dfrac{\mathrm{L}\supset\,\dfrac{A \Rightarrow A \qquad \mathrm{L}\supset\,\dfrac{B \Rightarrow B \qquad A \Rightarrow A}{A \supset B, A \Rightarrow B}}{A, A, A \supset (A \supset B) \Rightarrow B}}{A, A \supset (A \supset B) \Rightarrow B}}{A \supset (A \supset B) \Rightarrow A \supset B}$$

$$Corte\,\dfrac{\mathrm{R}\neg\,\dfrac{\mathrm{L}\neg\,\dfrac{A \Rightarrow A}{A, \neg A \Rightarrow}}{A \Rightarrow \neg\neg A} \qquad \mathrm{R}\vee\,\dfrac{\mathrm{L}\neg\,\dfrac{\mathrm{R}\neg\,\dfrac{\mathrm{R}W\,\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A, C}}{\Rightarrow A, \neg A, C}}{\neg\neg A, \Rightarrow A, C}}{\neg\neg A \Rightarrow A \vee C}}{A \Rightarrow A \vee C}$$

Propiedades del cálculo de secuentes

- Hay dos tipos de reglas: estructurales y operacionales. Las reglas operacionales determinan el comportamiento de las conectivas. Las reglas estructurales determinan las características de la relación de consecuencia.
- Todas las derivaciones deben comenzar con un secuente inicial. Todas las derivaciones tienen forma de árbol.
- No hay reglas de eliminación, excepto por Corte. Pero Corte es eliminable!
- La propiedad de subfórmula (*subformula property*).
- Cómo encontrar contramodelos para secuentes que no tienen prueba.
- Comparación con los sistemas de deducción natural y con otros procedimientos de prueba.
- La modularidad de las reglas y los sistemas como teorías del significado de las constantes lógicas.

Completitud y Corrección

- *Correccion*: Si hay una derivación de $\Gamma \Rightarrow \Delta$, entonces Γ implica Δ (i.e. $\Gamma \vDash \Delta$).
- *Completitud*: Si Γ implica Δ, entonces hay una derivación de $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Ejercicios

1. Ofrezca una derivación de los siguientes secuentes:
   (**1**) $A \supset (B \supset C) \Rightarrow B \supset (A \supset C)$
   (**2**) $(A \wedge B) \supset C \Rightarrow (A \supset C) \vee (B \supset C)$
   (**3**) $A \wedge \neg A \Rightarrow B$
   (**4**) $(A \supset C) \wedge (B \supset C) \Rightarrow (A \vee B) \supset C$
   (**5**) $A \supset \neg B \Rightarrow B \supset \neg A$
   (**6**) $\Rightarrow (A \supset B) \vee (B \supset A)$
   (**7**) $A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

2. Una regla es *derivable* si hay una derivación del secuente inferior de la regla a partir de los secuentes superiores de la regla. Muestre que la siguiente regla es derivable en LK:

$$\mathrm{L}\vee^* \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}$$

3. Muestre que si agregamos la conectiva binaria $\bullet$ al lenguage de la lógica proposicional y agregamos también las siguientes dos reglas a LK, el sistema resultante es trivial:

$$\mathrm{R}\bullet \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \bullet B, \Delta} \qquad\qquad \mathrm{L}\bullet \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \bullet B \Rightarrow \Delta}$$

4. Hay diversas maneras de debilitar LK. Considere qué tipo de lógica obtenemos si decidimos rechazar alguna de las reglas de la negación.

Referencias

[1] S. Negri and J. von Plato. *Structural Proof Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[2] A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.