Secuentes para las lógicas modales

A modo de repaso

- Un *secuente* es un objeto de la forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$, donde Γ y Δ son colecciones de fórmulas del lenguaje de la lógica proposicional $\mathcal{L}$. Γ es el *antesecuente* y Δ es el *postsecuente*.
- Una lectura intuitiva para $\Gamma \Rightarrow \Delta$: si acepto todas las fórmulas de Γ, no puedo rechazar todas las fórmulas de Δ.
- El sistema LK es un cálculo de secuentes que captura la noción de consecuencia clásica para el lenguaje $\mathcal{L}$.
- Una de las características más atractivas de LK es que su única regla de eliminación es la regla de Corte. Y dicha regla es redundante! En consecuencia, LK tiene la propiedad de subfórmula (*subformula property*)[1].
- Sea $\mathcal{L}_\Box$ el lenguaje de las lógicas modales proposicionales.
- Dicho lenguaje es idéntico al lenguaje $\mathcal{L}$ de la lógica proposicional, excepto porque incluye un operador unario de necesidad $\Box$. (El operador de posibilidad $\Diamond$ puede definirse a partir de $\Box$ y $\neg$).
- Si A es una fórmula bien formada de $\mathcal{L}_\Box$, también lo es $\Box A$.
- $\Box A$ expresa la idea de que A es necesariamente verdadera.
- En términos semánticos, $\Box A$ afirma que en todo mundo posible la proposición expresada por la oración A se cumple.
- Así como es posible caracterizar la noción de consecuencia de la lógica proposicional (no modal) en términos sintácticos utilizando el sistema LK, lo mismo puede hacerse para las lógicas modales.
- Dado de las lógicas modales extienden la lógica proposicional, lo que debemos hacer es agregar nuevas reglas a LK que determinen el comportamiento del operador $\Box$.

[1] Sí, también las reglas de contracción son reglas de eliminación. Pero, al igual que con la regla de corte, LK puede formularse de modo tal de hacer que las reglas de contracción sean también redundantes.

Extendiendo LK

- Si agregamos la siguiente regla a LK obtenemos la lógica modal K:

  $$K\ \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}$$

  (donde $\Box\Gamma$ debe entenderse como $\{\Box\gamma : \gamma \in \Gamma\}$)

- Si agregamos la siguiente regla a $LK{+}K$ obtenemos la lógica modal T:

  $$T\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma, \Box A \Rightarrow B}$$

- Si agregamos la siguiente regla a $LK{+}K{+}T$ obtenemos la lógica modal $S4$:

  $$4\ \frac{\Box\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}$$

- Lo mismo puede hacerse con otras lógicas modales, pero....
- .... el caso de $S5$ es problemático.

Algunos ejemplos

$$K\ \dfrac{\mathrm{L}{\supset}\ \dfrac{A \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow B}{A \supset B, A \Rightarrow B}}{\Box(A \supset B), \Box A \Rightarrow \Box B}$$

$$\mathrm{L}{\wedge}\ \dfrac{K\ \dfrac{\mathrm{R}{\wedge}\ \dfrac{A \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow A \wedge B}}{\Box A, \Box B \Rightarrow \Box(A \wedge B)}}{\Box A \wedge \Box B \Rightarrow \Box(A \wedge B)}$$

$$T\ \dfrac{A \Rightarrow A}{\Box A \Rightarrow A}$$

$$\mathrm{R}{\neg}\ \dfrac{T\ \dfrac{\mathrm{L}{\neg}\ \dfrac{A \Rightarrow A}{A, \neg A \Rightarrow}}{A, \Box\neg A \Rightarrow}}{A \Rightarrow \neg\Box\neg A}$$

$$T\ \dfrac{\mathrm{L}{\supset}\ \dfrac{A \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow B}{A \supset B, A \Rightarrow B}}{\Box(A \supset B), A \Rightarrow B}$$

$$4\ \dfrac{K\ \dfrac{A \Rightarrow A}{\Box A \Rightarrow \Box A}}{\Box A \Rightarrow \Box\Box A}$$

$$4\ \dfrac{4\ \dfrac{T\ \dfrac{A \Rightarrow A}{\Box A \Rightarrow A}}{\Box A \Rightarrow \Box A}}{\Box A \Rightarrow \Box\Box A}$$

$$T\ \dfrac{\mathrm{R}C\ \dfrac{\mathrm{L}{\vee}\ \dfrac{4\ \dfrac{K\ \dfrac{\dfrac{\vdots}{A \Rightarrow A \vee B}}{\Box A \Rightarrow \Box(A \vee B)}}{\Box A \Rightarrow \Box\Box(A \vee B)} \qquad 4\ \dfrac{K\ \dfrac{\dfrac{\vdots}{B \Rightarrow A \vee B}}{\Box B \Rightarrow \Box(A \vee B)}}{\Box B \Rightarrow \Box\Box(A \vee B)}}{\Box A \vee \Box B \Rightarrow \Box\Box(A \vee B), \Box\Box(A \vee B)}}{\Box A \vee \Box B \Rightarrow \Box\Box(A \vee B)}}{\Box(\Box A \vee \Box B) \Rightarrow \Box\Box(A \vee B)}$$

La lógica modal $S5$

- Si agregamos la siguiente regla a $LK{+}T$ obtenemos la lógica modal $S5$:

$$5\ \frac{\Box\Gamma \Rightarrow A, \Box\Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Box\Delta}$$

- Es decir, tenemos una prueba del secuente $\neg\Box\neg A \Rightarrow \Box\neg\Box\neg A$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\neg A, A \Rightarrow}\,\text{L}\neg}{\neg A \Rightarrow \neg A}\,\text{R}\neg}{\Box\neg A \Rightarrow \Box\neg A}\,K}{\Rightarrow \Box\neg A, \neg\Box\neg A}\,\text{R}\neg}{\Rightarrow \Box\neg A, \Box\neg\Box\neg A}\,5}{\neg\Box\neg A \Rightarrow \Box\neg\Box\neg A}\,\text{L}\neg$$

- El problema es que en el cálculo resultante la regla de Corte no es eliminable!

- Consideremos la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box\neg A \Rightarrow \Box\neg A}{\Rightarrow \Box\neg A, \neg\Box\neg A}\,\text{R}\neg}{\Rightarrow \Box\neg\Box\neg A, \Box\neg A}\,5 \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\neg A, A \Rightarrow}\,\text{L}\neg}{\Box\neg A, A \Rightarrow}\,T}{A \Rightarrow \Box\neg\Box\neg A}\,Corte$$

- No hay una derivación del secuente $A \Rightarrow \Box\neg\Box\neg A$ que no utilice la regla de Corte.

- Hasta dónde sé, nadie ha probado que no existe ninguna forma de dar un cálculo de secuentes (como los que hemos visto) para $S5$. Pero actualmente la opinión mayoritaria es que no es posible.

- Existen ciertos cálculos de secuentes para $S5$ donde la regla de corte es redundante, pero dichos cálculos son fuertemente no estándar (hiper-secuentes, secuentes etiquetados, etc.).

Ejercicios

1. Ofrezca derivaciones de los siguiente secuentes utilizando las reglas modales K, T y 4:

   a) $\Box A \vee \Box B \Rightarrow \Box(A \vee B)$.

   b) $\neg\Box\Box\neg A \Rightarrow \neg\Box\neg A$.

   c) $\Rightarrow A \vee \neg\Box A$.

2. Muestre que la regla K es derivable en $LK{+}T{+}4$.

3. Indique si ve algún problema con la siguiente regla:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\Delta}$$

4. Consideremos el operador de posibilidad $\Diamond A$. Usualmente definimos $\Diamond A$ como $\neg\Box\neg A$.

   a) Ofrezca una regla para $\Diamond$ que capture el principio $A \Rightarrow \Diamond A$, equivalente al principio T.

   b) Ofrezca una regla para $\Diamond$ que capture el principio $\Diamond\Diamond A \Rightarrow \Diamond A$, equivalente al principio 4.

Projecto

- Sea $\mathcal{L}_{Val}$ un lenguaje que extiende a $\mathcal{L}$ con un operador diádico de validez Val. Si A y B son fórmulas bien formadas de $\mathcal{L}_{Val}$, $Val(A, B)$ también lo es. $Val(A, B)$ expresa la idea de que el argumento con premisa A y conclusión B es válido.

  1. Reflexione acerca de la relación entre $A \supset B$, $\Box(A \supset B)$ y $Val(A, B)$.
  2. Indique cómo expresar la afirmación de que A es una fórmula válida/contradictoria utilizando el operador Val.
  3. Piense qué reglas debería obedecer dicho operador.[2]

Referencias

[1] S. Negri. Proof theory for modal logic. *Philosophy Compass*, 6(8):523–538, 2011.

[2] A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[2] En cada apunte voy a dejar un 'proyecto' que, en caso de que a alguno le interese, puede utilizarse para escribir la monografía final del curso. Por supuesto, no duden en solicitar más bibliografía sobre el tema si les interesa.