Tableaux para las lógica modales no normales

A modo de repaso

Los lenguajes modales

- El lenguaje $\mathcal{L}_\Box$ de las lógicas modales proposicionales es idéntico al lenguaje $\mathcal{L}$ de la lógica proposicional, excepto porque incluye un operador unario de necesidad $\Box$ y un operador unario de posibilidad $\Diamond$.
- El operador de posibilidad (necesidad) puede definirse a partir del operador de necesidad (posibilidad) y la negación $\neg$, pero será conveniente en lo que sigue tratar a ambos como operadores primitivos.
- Si A es una fórmula bien formada de $\mathcal{L}_\Box$, también lo son $\Box A$ y $\Diamond A$.
- $\Box A$ expresa la idea de que A es necesariamente verdadera y $\Diamond A$ expresa la idea de que A es posiblemente verdadera.

La semántica modal normal

- Una interpretación para $\mathcal{L}_\Box$ es una terna $< W, R, v >$, donde W es un conjunto no vacío de mundos posibles ($W \neq \varnothing$), R es una relación de accesibilidad entre esos mundos ($R \subseteq W \times W$) y v es una función que asigna un valor de verdad a cada par formado por un mundo w y una letra proposicional p ($v : W \times Var \to \{0, 1\}$).
- La expresión $v_w(A) = 1$ debe interpretarse como 'el valor de verdad de la oración A en el mundo w es 1'.
- Las condiciones de verdad para las oraciones complejas de $\mathcal{L}_\Box$ se establecen del modo siguiente:
  - $v_w(\neg A) = 1$ sii $v_w(A) = 0$
  - $v_w(A \wedge B) = 1$ sii $v_w(A) = 1$ y $v_w(B) = 1$
  - $v_w(A \vee B) = 1$ sii $v_w(A) = 1$ o $v_w(B) = 1$
  - $v_w(\Box A) = 1$ sii para *todo* mundo w' tal que wRw', se da que $v_{w'}(A) = 1$.
  - $v_w(\Diamond A) = 1$ sii para *algún* mundo w' tal que wRw', se da que $v_{w'}(A) = 1$.
- La noción de validez se define como sigue: $\Sigma \models A$ sii para toda interpretación $< W, R, v >$ y todo $w \in W$: si $v_w(B) = 1$ para toda $B \in \Sigma$, entonces $v_w(A) = 1$.
- El sistema modal resultante suele conocerse como K. Si imponemos condiciones sobre la relación de accesibilidad R (reflexividad, transitividad, simetría, etc.), podemos obtener sistemas modales que extienden a K, como T, $S4$ y $S5$, entre otros.

Tableaux para las lógicas modales normales

- Los tableaux para las lógicas modales son similares a los tableaux para la lógica clásica, excepto por las siguientes modificaciones:

- Los nodos son ahora objetos de la forma A, i (donde A es una fórmula e i es un mundo) o de la forma iRj (donde i y j son mundos y R es la relación de accesibiliad entre mundos).
- La lista inicial del tableaux contiene objetos de la forma $A, 0$ para cada premisa A y $\neg B, 0$ para la conclusión B.
- Las reglas lógicas usuales deben indexarse a mundos. Por ejemplo, si tengo la fórmula $A \wedge B, i$ en una rama puedo inferir A, i y B, i (esto se aplica de modo similar a las otras reglas lógicas).
- Una rama se cierra cuando para alguna fórmula A y algún mundo i, tenemos tanto A, i como $\neg A, i$ en la rama.
- Las reglas para los operadores modales son las siguientes:

$$\begin{array}{l} \neg\Box A, i \\ \downarrow \\ \Diamond\neg A, i \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Box A, i \\ iRj \\ \downarrow \\ A, j \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg\Diamond A, i \\ \downarrow \\ \Box\neg A, i \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Diamond A, i \\ \downarrow \\ iRj \\ A, j \end{array}$$

- Al igual que en la sección semántica, es posible obtener sistemas de tableaux más fuertes agregando reglas para la relación de accesibilidad R.
- Por ejemplo, podemos utilizar las siguientes reglas para ofrecer tableaux correspondientes a los sistemas T, $S4$ y $S5$:

$$\begin{array}{l} . \\ \downarrow \\ iRi \end{array} \qquad \begin{array}{l} iRj \\ jRk \\ \downarrow \\ iRk \end{array} \qquad \begin{array}{l} iRj \\ \downarrow \\ jRi \end{array}$$

Lógicas modales no normales

Semántica

- Una interpretación no normal para el lenguaje $\mathcal{L}_\Box$ es una estructura $< W, N, R, v >$ donde W, R y v se definen de la misma forma que antes y N es un conjunto de mundos *normales* que está incluido en W ($N \subseteq W$).
- De modo que podría haber mundos w que no pertenecen a N pero sí a W. Diremos que dichos mundos son *anormales*.
- Las condiciones de verdad para las conectivas no presentan novedades. Las condiciones de verdad para los enunciados de la forma $\Box A$ y de la forma $\Diamond A$ tampoco presentan novedades en los mundos normales. Pero si w es un mundo anormal, entonces: $v_w(\Box A) = 0$ y $v_w(\Diamond A) = 1$.
- Si utilizamos un eslogan, en los mundos anormales 'nada es necesario' y 'todo es posible'.
- La noción de validez se define *sobre mundos normales*: $\Sigma \models A$ sii para toda interpretación $< W, N, R, v >$ y todo $w \in N$: si $v_w(B) = 1$ para toda $B \in \Sigma$, entonces $v_w(A) = 1$.
- El sistema modal resultante suele conocerse como N.
- Si imponemos condiciones sobre la relación de accesibilidad R (reflexividad, transitividad, simetría, etc.), podemos obtener sistemas modales no normales que extienden a N, como $S2$ (N + reflexividad), $S3$ ($S2$ + transitividad) y $S3.5$ ($S3$ + simetría) entre otros. Diremos que estos sistemas pertenecen a la *familia de lógicas modales no normales N*.
- La característica fundamental de las lógicas no normales es la falla de la regla de necesitación. Dicha regla falla en N y en todas sus extensiones: $\vdash_N \Box(p \vee \neg p)$, pero $\nvdash_N \Box\Box(p \vee \neg p)$. Sin embargo, si A es una verdad *lógica*, entonces se cumple que $\vdash_N \Box A$.
- Es sencillo ver que la lógica N es más débil que la lógica K. Todo argumento valido en N es válido en K, pero hay argumentos válidos en K que no son válidos en N.
- De forma análoga, $S2$ es más débil que T, $S3$ es más débil que $S4$ y $S3.5$ es más débil que $S5$.

Tableaux para las lógicas modales no normales

- Podemos obtener tableaux para N y sus extensiones no normales modificando levemente los tableaux para K.
- Si un mundo i ocurre en una rama del tableaux, diremos que dicho mundo está $\Box$-*habitado* si hay algún nodo de la forma $\Box B, i$ en la rama.

- La regla

  $\Diamond A, i$
  $\downarrow$
  iRj
  A, j

  sólo puede aplicarse cuando $i = 0$ o cuando i está $\Box$-habitado.

- La idea detrás de esta restricción es que para inferir de $\Diamond A, i$ que existe un mundo j tal que iRj y A, j, debemos asegurarnos que i sea un mundo normal. Para ello, es suficiente constatar que sea 0 (ya que 0 es normal por estipulación) o que incluya alguna afirmación de la forma $\Box B, i$ (ya que en los mundos anormales nada es necesario).

- Ejemplos:
  - $\vdash_N \Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$
  - $\vdash_N \Box\neg A \supset \Box\neg(A \wedge B)$
  - $\nvdash_N \Box(p \supset \Box(q \supset q))$
  - $p, \Box(p \supset q) \nvdash_N q$

- Al igual que con los tableaux usuales, es posible construir un contramodelo a partir de un tableaux con ramas abiertas. Los mundos normales del contramodelo son 0 y aquellos que estén $\Box$-habitados. El resto son mundos anormales.

- Los tableaux para las lógicas $S2$, $S3$, $S3.5$, etc. se obtienen agregando las reglas usuales para la relación de accesibilidad R.

Algunas variaciones

- Es posible construir lógicas modales no normales más débiles que las que pertenecen a la familia N.
- Una forma de hacer esto es definir la noción de validez como preservación de verdad en todos los mundos, tanto normales como anormales: $\Sigma \vDash A$ sii para toda estructura $< W, N, R, v >$ y todo $w \in W$: si $v_w(B) = 1$ para toda $B \in \Sigma$, entonces $v_w(A) = 1$.
- Podemos llamar a la lógica resultante E.
- Como es usual, podemos obtener extensiones de E imponiendo condiciones sobre la relación de accesibilidad. Por ejemplo, los sistemas $E2$ (E + reflexividad), $E3$ ($E2$ + transitividad) y $E3.5$ ($E3$ + simetría). Diremos que dichos sismteas pertenecen a *la familia E de lógicas modales no normales*.
- Otra forma de obtener lógicas modales no normales más débiles que N es cambiando las condiciones de verdad para los enunciados $\Box A$ y $\Diamond A$.
- En particular, podemos estipular que en mundos anormales los valores de $\Box A$ y $\Diamond A$ se asignan arbitrariamente.
- La lógica resultante se conoce como L.
- Podemos construir tableaux para L. Dichos tableaux son iguales a los de N excepto porque las reglas para las fórmulas modales sólo pueden aplicarse en el mundo 0.
- Ejemplos:
  - $\vdash_L \Box(\Box A \vee \neg\Box A)$
  - $\nvdash_L \Box(\Box p \supset p) \vee \Diamond(q \wedge \neg q))$
- De la misma forma que antes, es posible construir un contramodelo a partir de un tableaux con ramas abiertas. El único mundo normal del contramodelo será 0.
- Diremos que los sistemas que extienden a L pertenecen a *la familia de lógicas modales no normales L*. Ocurre algo interesante al considerar dichos sistemas.
- Si agregamos la condición de reflexividad sobre la relación de accesibilidad, obtenemos el sistema conocido como $S0.5$.
- Sin embargo, la adición de otras condiciones sobre $S0.5$ como transitividad y simetría no genera nuevos sistemas más fuertes que $S0.5$.
- Otro aspecto interesante de las lógicas de la familia L es que podría ocurrir que $\Box A$ y $\neg\Diamond\neg A$ tengan valores distintos en el mismo mundo anormal (y lo mismo ocurre con $\Diamond A$ y $\neg\Box\neg A$). De modo que es necesario aquí tratar a ambos operadores como primitivos.
- La lógica L es más débil que la lógica N, ya que todo argumento válido en L es válido en N pero la conversa no se cumple.

Ejercicios

1. Pruebe los siguientes hechos utilizando los tableaux para las lógicas modales no normales correspondientes:
   a) $\vdash_N \Box(\Box(A \supset B) \supset \Box(\neg B \supset \neg A))$.
   b) $\Box(A \supset B) \wedge A \vdash_{S2} B$.
   c) $\vdash_{S3} \Box(\Box(A \supset B) \supset (\Box(\Box A \supset \Box B)))$.
   d) $\vdash_L \Box(A \supset A)$
2. Ofrezca un contramodelo para mostrar que las siguientes oraciones son inválidas en las lógicas modales no normales correspondientes:
   a) $\nvdash_N \Box\Box(p \vee \neg p)$.
   b) $\nvdash_{S3} \Box p \supset \Box\Box p$.
   c) $\nvdash_L \Box(\Box(p \supset q) \supset \Box(\neg q \supset \neg p))$.
3. Pruebe que si A es una tautología de la lógica clásica, entonces $\vdash_L \Box A$ y $\vdash_N \Box A$. ¿Vale esto también para $\vdash_E$?
4. Indique por qué al agregar la condición de que R sea transitiva y simétrica a $S0.5$ no se genera un sistema más fuerte, como ocurría en el caso de las otras lógicas modales. (Sugerencia: Piense cómo podríamos construir los tableaux para $S0.5$ y note que en los tableaux para L las reglas modales sólo pueden aplicarse en el mundo 0).

Projecto 1

- Sea $\mathcal{L}_K$ un lenguaje como $\mathcal{L}_\Box$ pero con un operador de conocimiento K en lugar de un operador de necesidad. Para nuestros propósitos, podemos entender KA como 'sé que A'. Una interpretación de *Rantala* es una estructura $< W, N, R, v >$ en la que los mundos anormales w no pertenecientes a N ($w \notin N$) son completamente anárquicos. Es decir, para toda fórmula A (modal o no modal) del lenguaje $\mathcal{L}_K$, v asigna una valor arbitrario a A. En particular, podría ocurrir que si w es un mundo anormal, para cierta fórmula B, $v_w(B) = v_w(\neg B) = 1$. Es decir, ciertos mundos anormales son mundos *imposibles.* La noción de validez, que llamaré $\vdash_R$ se define como en la lógica N (i.e. sobre mundos normales). Considere los siguientes principios vinculados a la noción de conocimiento:

  - Si KA y $A \vdash B$, entonces KB (Si sé que A, entonces sé todo lo que se sigue de A).
  - Si $\vdash A$, entonces $\vdash KA$ (Si hay una prueba de A, hay una prueba de que sé que A).
  - $\vdash \neg(KA \wedge K\neg A)$ (No se da que sé A y sé la negación de A).

  Tomados conjuntamente, estos principios nos dan una noción fuertemente idealizada de conocimiento, mientras que el conocimiento de agentes humanos suele ser finito y falible. En la lógica definida por medio de estructuras de Rantala podemos hacer que estos principios fallen. Teniendo en cuenta estas cuestiones, reflexione acerca de los siguientes puntos:

  - ¿Qué ocurre con la noción de conocimiento en las lógicas modales normales y no normales consideradas anteriormente?
  - ¿Cuál es la diferencia entre la noción de conocimiento y la noción de creencia? ¿Qué principios modales debería satisfacer cada una? Considera que hay algún principio que las vincule?
  - ¿Es apropiado decir que así como hay muchas nociones de necesidad (lógica, física, metafísica, etc.) hay también muchas nociones de conocimiento?

Projecto 2

- En ocasiones, se dice que ciertas posiciones *realistas* están comprometidas con la tesis según la cual existen verdades que no es posible conocer. En contraposición a esto, a veces se caracterizan ciertas posiciones *antirrealistas* identificándolas con la tesis de que toda verdad es cognoscible. Sea $\mathcal{L}_{\Box K}$ un lenguaje multimodal que contiene tanto un operador de conocimiento K como operadores de posibilidad $\Diamond$ y necesidad $\Box$. En dicho lenguaje, podemos expresar la tesis antirrealista de la siguiente forma:

  (*Principio de Cognoscibilidad*) $A \supset \Diamond KA$

  Frederic Fitch (con ayuda de Alonzo Church) mostró que este principio lleva a consecuencias inaceptables. Lo hizo de la siguiente forma. Podemos asumir que el operador K se distribuye sobre la conjunción, con lo cual
  $\vdash K(p \wedge \neg Kp) \supset (Kp \wedge K\neg Kp)$
  Pero esto nos lleva a
  $\vdash K(p \wedge \neg Kp) \supset (Kp \wedge \neg Kp)$
  ya que conocimiento implica verdad. Pero dado que el consecuente es contradictorio, por *modus tollens* inferimos
  $\vdash \neg K(p \wedge \neg Kp)$
  Y como esto es un teorema, tenemos
  $\vdash \Box\neg K(p \wedge \neg Kp)$
  o, lo que es lo mismo
  $\vdash \neg\Diamond K(p \wedge \neg Kp)$
  Ahora bien, una instancia particular del Principio de Cognoscibilidad es la siguiente:
  $\vdash (p \wedge \neg Kp) \supset \Diamond K(p \wedge \neg Kp)$
  donde reemplazo A por la fórmula $p \wedge \neg Kp$. Por ende, por *modus tollens* nuevamente podemos inferir
  $\vdash \neg(p \wedge \neg Kp)$
  Pero nótese que esto es equivalente a
  $\vdash p \supset Kp$
  lo cual es claramente falso, ya que hay ciertas verdaderas que no son conocidas. Este razonamiento suele conocerse como la 'paradoja de Fitch' o la 'paradoja de la cognoscibilidad'. Considerando el razonamiento que acabamos de desarrollar, reflexione sobre las siguientes cuestiones:

  - ¿Considera que el Principio de Cognoscibilidad debe acerptarse?
  - ¿Qué principios modales fueron utilizados en el razonamiento anterior?
  - ¿Acaso todas las lógicas modales que hemos visto validan los principios utilizados en el razonamiento?
  - ¿De qué forma(s) podría el antirrealista responder al argumento de Fitch?

Referencias

[1] F. Berto. Impossible worlds. In E. Zalta, editor, *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* 2013.

[2] B. Brogaard and J. Salerno. Fitcht's paradox of knowability. In E. Zalta, editor, *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* 2013.

[3] G. Priest. *An Introduction to non-classical Logics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2008 (2nd edition).