Secuentes para la lógica intuicionista

A modo de repaso

Secuentes para la lógica proposicional clásica

- Un *secuente* es un objeto de la forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$ donde Γ y Δ son colecciones de fórmulas. Γ es el *antesecuente* y Δ es el *postsecuente*.
- Una lectura intuitiva para $\Gamma \Rightarrow \Delta$: si acepto todas las fórmulas de Γ, no puedo rechazar todas las fórmulas de Δ.
- En consecuencia, $\Rightarrow A$ expresa la idea de que A debe aceptarse y $A \Rightarrow$ expresa la idea de que A debe rechazarse.

Definición El sistema LK para la lógica proposicional clásica contiene los siguientes secuentes iniciales (axiomas) y las siguientes reglas (Γ, Δ, Π y Σ son multiconjuntos de fórmulas):

Secuentes iniciales

$$\text{Ax}\ \frac{}{A \Rightarrow A}$$

Reglas estructurales

$$Corte\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Pi, A \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$\text{L}W\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}W\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}$$

$$\text{L}C\ \frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}C\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}$$

Reglas operacionales

$$\text{L}\neg\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta}$$

$$\text{L}\vee\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Pi, B \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, A \vee B \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta}$$

$$\text{L}\wedge\ \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Pi \Rightarrow B, \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow A \wedge B, \Delta, \Sigma}$$

$$\text{L}\supset\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Pi, B \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, A \supset B \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \text{R}\supset\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \supset B, \Delta}$$

La lógica intuicionista

Modelos

- El lenguaje de la lógica intuicionista $\mathcal{L}$ contiene las siguientes conectivas: $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\supset$.
- Una interpretación intuicionista para $\mathcal{L}$ es una estructura $< W, R, v >$ en la que W es un conjunto no vacío de mundos, R es una relación diádica entre los miembros de W y v es una función de valuación que le asigna valores semánticos en $\{1, 0\}$ a las fórmulas atómicas en cada mundo.
- La relación R es reflexiva, transitiva (al igual que en la lógica modal $S4$) y satisface la siguiente condición, conocida como *herencia*:
  - para todo $w \in W$ y toda $p \in \mathcal{L}$, si $v_w(p) = 1$ y Rww', entonces $v_{w'}(p) = 1$.
- La función v satisface las siguiente condiciones:
  - $v_w(A \wedge B) = 1$ si y sólo si $v_w(A) = 1$ y $v_w(B) = 1$.
  - $v_w(A \vee B) = 1$ si y sólo si $v_w(A) = 1$ o $v_w(B) = 1$.
  - $v_w(\neg A) = 1$ si y sólo si para todo w' tal que Rww', $v_{w'}(A) = 0$.
  - $v_w(A \supset B) = 1$ si y sólo si para todo w' tal que Rww', $v_{w'}(A) = 0$ o $v_{w'}(B) = 1$.
- La noción de validez se caracteriza del modo usual: Γ implica intuicionisticamente A (esto es, $\Gamma \vdash_{Int} A$) si y sólo si para toda estructura $< W, R, v >$ y todo mundo $w \in W$, si $v_w(B) = 1$ para cada $B \in \Gamma$, entonces $v_w(A) = 1$.
- Nótese que podemos obtener lógicas más fuertes que la lógica intuicionista imponiendo más condiciones sobre la relación R, al igual que en las lógicas modales.

Secuentes

- Un *secuente intuicionista* es un objeto de la forma $\Gamma \Rightarrow A$ donde Γ es una colección de fórmulas y A es *una* fórmula.
- Es decir, los secuentes intuicionistas son idénticos a los secuentes clásicos excepto porque no admiten conclusiones múltiples.
- La lectura del secuente no difiere de la usual: $\Gamma \Rightarrow A$ indica que si aceptamos lo expresado por todas las oraciones de Γ, no podemos rechazar lo expresado por la oración A.

Definición El sistema LJ para la lógica proposicional intuicionista contiene los siguientes secuentes iniciales (axiomas) y las siguientes reglas (Γ y Π son multiconjuntos de fórmulas):

Secuentes iniciales

$$\text{Ax}\,\frac{}{A \Rightarrow A}$$

Reglas estructurales

$$Corte\,\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Pi, A \Rightarrow B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow B}$$

$$\text{L}W\,\frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma, A \Rightarrow B} \qquad \text{R}W\,\frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A}$$

$$\text{L}C\,\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow B}{\Gamma, A \Rightarrow B}$$

Reglas operacionales

$$\text{L}\neg\,\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma, \neg A \Rightarrow} \qquad \text{R}\neg\,\frac{\Gamma, A \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg A}$$

$$\text{L}\vee\,\frac{\Gamma, A \Rightarrow C \qquad \Pi, B \Rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \vee B \Rightarrow C} \qquad \text{R}\vee\,\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}$$

$$\text{L}\wedge\,\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow C} \qquad \text{R}\wedge\,\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Pi \Rightarrow B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow A \wedge B}$$

$$\text{L}\supset\,\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Pi, B \Rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \supset B \Rightarrow C} \qquad \text{R}\supset\,\frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \supset B}$$

Algunos ejemplos

- $p \Rightarrow \neg\neg p$

$$\mathrm{R}\neg\,\dfrac{\mathrm{L}\neg\,\dfrac{p \Rightarrow p}{p, \neg p \Rightarrow}}{p \Rightarrow \neg\neg p}$$

- $\neg p \vee q \Rightarrow p \supset q$

$$\mathrm{R}{\supset}\,\dfrac{\mathrm{L}\vee\,\dfrac{\mathrm{R}W\,\dfrac{\mathrm{L}\neg\,\dfrac{p \Rightarrow p}{\neg p, p \Rightarrow}}{\neg p, p \Rightarrow q} \qquad q \Rightarrow q}{\neg p \vee q, p \Rightarrow q}}{\neg p \vee q \Rightarrow p \supset q}$$

- $\Rightarrow \neg\neg(p \vee \neg p)$

$$\mathrm{R}\neg\,\dfrac{\mathrm{L}C\,\dfrac{\mathrm{L}\neg\,\dfrac{\mathrm{R}\vee\,\dfrac{\mathrm{R}\neg\,\dfrac{\mathrm{L}\neg\,\dfrac{\mathrm{R}\vee\,\dfrac{p \Rightarrow p}{p \Rightarrow p \vee \neg p}}{\neg(p \vee \neg p), p \Rightarrow}}{\neg(p \vee \neg p) \Rightarrow \neg p}}{\neg(p \vee \neg p) \Rightarrow p \vee \neg p}}{\neg(p \vee \neg p), \neg(p \vee \neg p) \Rightarrow}}{\neg(p \vee \neg p) \Rightarrow}}{\Rightarrow \neg\neg(p \vee \neg p)}$$

- Ninguna de los siguientes secuentes (clásicamente válidos) tienen una prueba en LJ, ya que todos ellos requieren una derivación en la que se utilizan múltiples conclusiones:
  - $\not\Rightarrow p \vee \neg p$
  - $\neg\neg p \not\Rightarrow p$
  - $\not\Rightarrow ((p \supset q) \supset p) \supset p$
  - $\not\Rightarrow (p \supset q) \vee (q \supset p)$

Algunas propiedades interesantes de LJ

- Al igual que en LK:
  - Tenemos dos tipos de reglas: operacionales y subestructurales.
  - Todas las derivaciones deben comenzar con un secuente inicial y todas las derivaciones tienen forma de árbol.
  - No hay reglas de eliminación, excepto por Corte. Pero Corte es eliminable![1]
  - Tenemos la propiedad de subfórmula (*subformula property*).
  - La lógica intuicionista (proposicional) es decidible.
- A diferencia de LK:
  - En algunas de las reglas el postsecuente es vacío.
  - Ya no hay necesidad de tener una regla de contracción derecha.
  - Las conectivas no son interdefinibles de la manera usual. Por ejemplo, tenemos $\neg(\neg p \wedge \neg q) \not\Rightarrow p \vee q$, $\neg p \supset q \not\Rightarrow p \vee q$ y $\neg(p \wedge \neg q) \not\Rightarrow p \supset q$.
  - LJ es estrictamente más débil que LK, ya que toda prueba intuicionista es una prueba clásica, pero no toda prueba clásica es una prueba intuicionista. En otras palabras, LJ es una *sublógica* de LK.
  - No obstance, vale lo siguiente: $\Gamma \Rightarrow A$ tiene una prueba en LK si y sólo si $\neg\neg\Gamma \Rightarrow \neg\neg A$ tiene una prueba en LJ (donde $\neg\neg\Gamma$ es $\{\neg\neg B :$ para cada $B \in \Gamma\}$).
  - Si $\Rightarrow A \vee B$ tiene una prueba, entonces $\Rightarrow A$ tiene una prueba o $\Rightarrow B$ tiene una prueba.

Completitud y Corrección

- *Corrección*: Si hay una derivación de $\Gamma \Rightarrow A$ en LJ, entonces Γ implica intuicionisticamente A (i.e. $\Gamma \vDash_{Int} A$).
- *Completitud*: Si Γ implica intuicionisticamente A, entonces hay una derivación de $\Gamma \Rightarrow A$ en LJ.

[1] Para simplificar las cosas, olvidémonos por el momento de Contracción.

Ejercicios

1. Pruebe los siguiente secuentes en LJ:

   a) $\Rightarrow \neg(p \wedge \neg p)$
   b) $\neg p \vee \neg q \Rightarrow \neg(p \wedge q)$
   c) $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$

2. Ofrezca un contramodelo para mostrar que las siguientes inferencias son inválidas en la lógica intuicionista:

   a) $\neg p \supset p \not\vDash_{Int} p$
   b) $\neg p \supset \neg q \not\vDash_{Int} q \supset p$
   c) $p \supset (q \vee r) \not\vDash_{Int} (p \supset q) \vee (p \supset r)$

3. Muestre que la relación R satisface la siguiente condición:

   - si $v_{w'}(p) = 0$ y Rww', entonces $v_w(p) = 0$.

4. Muestre que $(p \supset q) \vee (q \supset p)$ resulta válida si imponemos la condición de que en toda estructura $< W, R, v >$, la relación R sea un orden lineal, esto es, que R satisfaga la condición de que para todo w y w' pertenecientes a W, Rww' o $Rw'w$ o $w = w'$. (Sugerencia: razone por el absurdo).

5. Definimos la función de traducción t (debida a McKinsey y Tarski) que toma enunciados del lenguaje intuicionista y los transforma en enunciados del lenguaje modal de la siguiente forma:

   - $t(p) = \Box p$ (para toda letra proposicional p)
   - $t(A \wedge B) = t(A) \wedge t(B)$
   - $t(A \vee B) = t(A) \vee t(B)$
   - $t(A \supset B) = \Box(t(A) \supset t(B))$
   - $t(\neg A) = \Box\neg t(A)$

   Dado un modelo intuicionista $< W, R, v >$ (que, por supuesto, también es un modelo de $S4$) y un mundo $w \in W$, pruebe por inducción sobre la complejidad de las fórmulas que para toda oración A, $v_w(A) = 1$ si y sólo si $v_w(t(A)) = 1$. A partir de esto es posible inferir que $\Gamma \vDash_{Int} A$ si y sólo si $t(\Gamma) \vDash_{S4} t(A)$ (donde, obviamente, $t(\Gamma) = \{t(B) : B \in \Gamma\}$). Prueba la parte que va de derecha a izquierda.

Projecto

En [1] y otros textos muy influyentes, Quine ha argumentado que no hay una rivalidad genuina ente la lógica clásica y la lógica intuicionista, ya que al rechazar los principios que gobiernan la negación clásica, el intuicionista estaría simplemente hablando de otra expresión. La posición de Quine suele asociarse con el dictum *cambio de lógica, cambio de tema*.

Para un *inferencialista* acerca del significado -esto es, alguien comprometido con la idea de que el significado de una expresión está determinado por las reglas inferenciales que gobiernan su uso-, la objeción de Quine toma la siguiente forma: dado que la negación clásica obedece ciertas reglas inferenciales que la negación intuicionista no obecede (por ejemplo, la regla de eliminación de la doble negación) y dado que el significado de la negación está determinado por esas reglas, entonces podemos concluir que el lógico clásico y el lógico intuicionista están hablando de expresiones distintas. De modo que no habría una discusión sustantiva entre ambos y por ende no habría una rivalidad genuina entre la lógica clásica y la lógica intuicionista. Esto es problemático porque el lógico intuicionista quiere afirmar que, en efecto, su lógica es correcta y que la lógica clásica no lo es, mientras que en la concepción de Quine ambas lógicas podrían ser igualmente correctas simplemente en virtud del hecho de que tematizan expresiones diferentes.

Sin embargo, recientemente Restall [2] ha observado que si utilizamos secuentes la cuestión cambia. El inferencialista puede afirmar que el significado de la negación está dado por las reglas operacionales que la gobiernan, en nuestro caso L$\neg$ y R$\neg$. Pero nótese que ambas reglas son idénticas en LJ y en LK (excepto por el hecho de que LJ no admite conclusiones múltiples). En consecuencia, el inferencialista puede resistir el argumento de Quine sugiriendo que las negaciones comparten (al menos parte de) su significado. Esto quiere decir que el intuicionista y el clásico están hablando acerca de los mismo -la negación- pero difieren en las propiedades que le atribuyen. Por ejemplo, el clásico afirma que $\neg\neg A \Rightarrow A$, mientras que el intuicionista afirma que $\neg\neg A \not\Rightarrow A$. Luego, habría una rivalidad genuina entre la lógica clásica y la lógica intuicionista o, dicho quineanamente, habría un cambio de lógica sin un cambio de tema.

Teniendo en cuenta estas cuestiones, reflexione acerca de los siguientes puntos:

- ¿Está de acuerdo con el argumento de Quine? Sí/no. En caso de que no esté de acuerdo, indique cómo cree que podemos dar una teoría acerca del significado de la negación que no transforme la disputa entre el lógica clásico y el intuicionista en una disputa meramente verbal.
- ¿Le parece satisfactoria la propuesta inferencialista de Restall? Dicha propuesta parece comprometida con la idea de que el significado de una expresión lógica está determinado por las reglas operacionales. ¿Qué ocurre con las reglas estructurales? Si variamos dichas reglas, ¿se modifica el significado de alguna expresión lógica?
- ¿Puede el argumento de Restall formularse con un procedimiento de prueba diferente del que utiliza secuentes?
- El argumento de Restall se aplica a la lógica intuicionista y a la lógica clásica. ¿Puede dicho argumento extenderse a otras lógicas?

Referencias

[1] W. Quine. *Philosophy of Logic.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1970.

[2] G. Restall. Pluralism and Proofs. *Erkenntnis*, 79(2):279–291, 2014.