Seminario *Lógicas no clásicas: inconsistencias sin trivialidad*

Lógicas multivaluadas

Lucas Rosenblatt
l_rosenblatt@hotmail.com
UBA - Conicet

Mayo, 2016

Introducción

- Las lógicas multivaluadas son lógicas que postulan más de dos valores de verdad.
- Es decir, además de la verdad y la falsedad existen categorías semánticas intermedias.
- Estas lógicas surgen a comienzos del siglo 20 en la escuela Polaca (Łukasiewicz, Tarski, Leśniewski, Jaśkowski, etc.).
- Las lógicas multivaluadas son interesantes no sólo desde un punto de vista formal sino que tienen aplicaciones filosóficas claras, como tendremos oportunidad de ver.
- En esta clase presentaré estas lógicas semánticamente. Luego, si hay tiempo, veremos cómo presentarlas en términos de secuentes o tableaux.

Semántica

- En lugar de utilizar una semántica de mundos posibles será conveniente emplear estructuras del siguiente tipo:

Definition

Una *estructura* $\mathcal{M}$ para un lenguaje proposicional $\mathcal{L}$ es una tupla $< \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} >$, donde:

- $\mathcal{V}$ es un conjunto no vacío de valores de verdad,
- $\mathcal{D}$ es un subconjunto propio no vacío de $\mathcal{V}$, el conjunto de valores designados, y
- $\mathcal{O}$ es un conjunto de funciones tal que para cada conectiva n-aria c de $\mathcal{L}$, hay una correspondiente función f_c en $\mathcal{O}$ tal que $f_c : \mathcal{V}^n \longrightarrow \mathcal{V}$.

- El conjunto $\mathcal{O}$ está compuesto por operaciones que se corresponden con las conectivas.
- En general, tendremos las funciones $f_\neg$, $f_\wedge$, $f_\vee$ y $f_\supset$, para la negación, la conjunción, la disyunción y el condicional, respectivamente.

Una estructura para la lógica clásica

- En el caso de la lógica clásica, la estructura $< \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} >$ puede definirse de la siguiente forma:
  - $\mathcal{V} = \{0, 1\}$,
  - $\mathcal{D} = \{1\}$, and
  - $\mathcal{O}$ está definido como sigue:

	$\neg$
1	0
0	1

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\wedge$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\supset$	1	0
1	1	0
0	1	1

La noción de consecuencia clásica

- Una interpretación v es una función que asigna valores en $\mathcal{V}$ a las fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$ respetando las funciones presentes en $\mathcal{O}$.
- $\Gamma \vDash A$ si y sólo si no existe una interpretación v tal que $v(B) \in \mathcal{D}$ para cada $B \in \Gamma$ y $v(A) \notin \mathcal{D}$. Es decir, no existe una interpretación v que le asigne una valor designado a todas las premisas y un valor no designado a la conclusión.
- $\vDash A$ si y sólo si para toda interpretación v, $v(A) \in \mathcal{D}$.
- Nótese que las definiciones son completamente generales y no dependen de la identidad de $\mathcal{V}, \mathcal{D}$ o $\mathcal{O}$.

Otras lógicas

- Podemos definir otras lógicas de la misma forma utilizando este tipo de estructuras.
- $\mathcal{V}$ puede tener n valores de verdad, donde $n \geq 2$. (Incluso podría tener infinitos valorse de verdad).
- $\mathcal{D}$ puede tener más de un valor. Es decir, podría haber más de un valor designado.
- Las operaciones en $\mathcal{O}$ podrían ser distintas de las operaciones clásicas.
- Las interpretaciones v pueden asignar un valor en $\mathcal{V}$ distinto de 1 y 0 a las fórmulas de $\mathcal{L}$.
- La noción de consecuencia puede definirse como preservación de los valores designados, donde dichos valores pueden incluir no sólo a 1.

Otras lógicas

- Si $\mathcal{V}$ tiene finitos valores, diré que la lógica es *finitamente valuada*. Y si $\mathcal{V}$ tiene n valores, diré que la lógica es n-valuada.
- Toda lógica proposicional que pueda construirse de esta forma será decidible. Tenemos tablas de verdad!
- Si tenemos m valores y consideramos una fórmula con n letras proposionales distintas, la tabla de verdad de la fórmula tendrá m^n filas.

Vacíos de valores de verdad

- Hay muchas razones para pensar que ciertas oraciones del lenguaje natural no son verdaderas ni falsas: términos no referenciales, vaguedad, paradojas, sinsentidos, etc.
- Es muy sencillo dar un ejemplo de una lógica que capture esta idea.
- Definimos la lógica de *Kleene fuerte* K_3 de la siguiente forma:
  - $\mathcal{V} = \{1, \frac{1}{2}, 0\}$. El valor $\frac{1}{2}$ debe entenderse como 'ni verdadero ni falso'.
  - $\mathcal{D} = \{1\}$, como en la lógica clásica.
  - $\mathcal{O}$ se define de este modo:

	$\neg$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\supset$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

Algunas propiedades de K_3

- Nótese que inputs clásicos arrojan outputs clásicos.
- La negación de una oración ni verdadera ni falsa no es verdadera ni falsa. Luego, para ciertas oraciones A, del hecho de que A no sea verdadera no puedo inferir que su negación lo sea.
- Un argumento es válido en K_3 si preserva el valor designado (en este caso, verdad) de premisas a conclusión.

Algunos ejemplos

- $p \supset q \vDash_{K_3} \neg q \supset \neg p$.
- $p \supset q, p \vDash_{K_3} q$.
- $\neg\neg p \vDash_{K_3} p$ ($\neq$ lógica intuicionista)
- $p \wedge \neg p \vDash_{K_3} q$.
- $\nvDash_{K_3} p \vee \neg p$.
- $\nvDash_{K_3} p \supset p$.
- De hecho, $\nvDash_{K_3} A$, para toda fórmula A.
- Es decir, K_3 no tiene tautologías!
- ¿De qué sirve una lógica sin tautologías?

La lógica de Łukasiewicz Ł$_3$

- En K_3, un condicional con antecedente ni verdadero ni falso y consecuente ni verdadero ni falso no será verdadero ni falso.
- Ł$_3$ es exactamente como K_3 excepto por lo siguiente:

$\supset$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

- De modo que en Ł$_3$ sí hay teoremas. En particular, aunque $\nvDash_{L_3} p \vee \neg p$ tenemos $\vDash_{L_3} p \supset p$. Por ende, el condicional ya no es definible en términos de la disyunción y la negación.

Cúmulos de valores de verdad

- Así como hay razones para pensar que ciertas oraciones del lenguaje natural no son ni verdaderas ni falsas, también hay razones para pensar que ciertas oraciones son verdaderas *y* falsas: vaguedad, leyes inconsistentes, ficción, paradojas, etc.
- Al igual que antes, es muy sencillo dar un ejemplo de una lógica que rescate esta idea.
- La lógica *LP* (*logic of paradox*) se define exactamente como K_3 excepto porque
  - $\mathcal{D} = \{1, \frac{1}{2}\}$.
- El valor $\frac{1}{2}$ debe interpretarse como 'verdadero y falso'.

Algunas propiedades de *LP*

- La negación de una oración verdadera y falsa es verdadera.... y falsa.
- De modo que del hecho de que una oración sea verdadera no estamos autorizados a inferir que su negación no lo sea.
- Un argumento es válido en *LP* si preserva el valor designado (aquí, no-falsedad) de premisas a conclusión.

Algunos ejemplos

- $\models_{LP} p \vee \neg p$.
- $\models_{LP} p \supset p$.
- Un aspecto interesante de LP es que:
  - $\models_{LP} A$ si y sólo si A es una tautología clásica.
- $p \wedge q \models_{LP} p$.
- $p \wedge \neg p \not\models_{LP} q$.
- $p, \neg p \vee q \not\models_{LP} q$.
- $p, p \supset q \not\models_{LP} q$.

La lógica RM_3

- En LP el condicional no satisface la regla de modus ponens.
- RM_3 es exactamente como LP excepto por lo siguiente:

$\supset$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

- De modo que en RM_3, aunque el silogismo disyuntivo sigue siendo inválido, sí vale la regla de modus ponens. Por ende, el condicional ya no es definible en términos de la disyunción y la negación.

Los condicionales

		K_3	$Ł_3$	LP	RM_3
(1)	$q \models p \supset q$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$
(2)	$\neg p \models p \supset q$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$
(3)	$(p \wedge q) \supset r \models (p \supset r) \vee (q \supset r)$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
(4)	$(p \supset q) \wedge (r \supset s) \models (p \supset s) \vee (r \supset q)$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
(5)	$\neg(p \supset q) \models p$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
(6)	$p \supset r \models (p \wedge q) \supset r$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
(7)	$p \supset q, q \supset r \models p \supset r$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$
(8)	$p \supset q \models \neg q \supset \neg p$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
(9)	$\models p \supset (q \vee \neg q)$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times$
(10)	$\models (p \wedge \neg p) \supset q$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times$

Figure: Los condicionales

El argumento de Priest

- Priest presenta el siguiente argumento en contra de los condicionales de las lógicas multivaluadas.
- Condición 1: Si A tiene un valor designado, también lo tiene $A \vee B$.
- Condición 2: Si A y B tienen el mismo valor, entonces $A \equiv B$ tiene un valor designado.
- Tomemos cualquier lógica n-valuada que satisfaga las condiciones 1 y 2, y consideremos $n + 1$ formulas atómicas $p_1, p_2, ..., p_{n+1}$. Dado que sólo hay n valores de verdad, hay por lo menos un par de estas fórmulas que reciben el mismo valor. Sean esas fórmulas p_i y p_j.
- Luego, por la condición 2, la fórmula $p_i \equiv p_j$ tendrá un valor designado. Y, si ponemos a todos los bicondicionales en disyunción, la fórmula resultante también tendrá un valor designado, por la condición 1. Es decir, será lógicamente válida.
- Pero esto no puede estar bien! Sea p_n la formalización de 'Juan tiene n pelos en su cabeza'. Bajo esta interpretación, todos los bicondicionales deberían ser falsos, pero resulta que la disyunción es lógicamente válida.

FDE

Definition

La lógica *FDE* puede caracterizarse por medio de la estructura $\mathcal{M} =< \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} >$, donde:

- $\mathcal{V} = \{0, n, b, 1\}$,
- $\mathcal{D} = \{1, b\}$, y
- $\mathcal{O}$ se define de la siguiente forma:

	$\neg$
1	0
b	b
n	n
0	1

$\wedge$	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	b	b	0	0
n	n	0	n	0
0	0	0	0	0

$\vee$	1	b	n	0
1	1	1	1	1
b	1	b	1	b
n	1	1	n	n
0	1	b	n	0

Propiedades de *FDE*

- Un argumento es válido en *FDE* si preserva los valores designados 1 y *b*.
- *FDE* puede verse como una combinación de K_3 y *LP*. El valor *b* puede interpretarse como *verdadero y falso* y el valor *n* como *ni verdadera ni falso*.
- En *FDE* no habrá tautologías ni contradicciones.
- *FDE* es una lógica tanto paraconsistente ($A, \neg A \nvDash_{FDE} B$) como paracompleta ($\nvDash_{FDE} A \vee \neg A$).
- *FDE* es una sublógica de *LP* y de K_3, en el sentido de que cada argumento válido en *FDE* es válido en *LP* y en K_3.
- ¿Hay algún argumento que sea inválido en *FDE* pero válido tanto en K_3 como en *LP*?

Motivaciones filosóficas para adoptar lógicas multivaluadas

- Leyes inconsistentes.
- Paradojas de la autorreferencia.
- Fallas en la denotación.
- Futuros contingentes.
- Información incompleta e inconsistente.
- Etc.

Leyes inconsistentes

- Consideremos las siguientes dos normas:
  1. Ningún indígena tiene derecho a votar.
  2. Todos los propietarios de tierras tienen derecho a votar.
- Podría haber indígenas que tienen y no tienen derecho a votar.
- *Objeción*: Usualmente estos conflictos pueden resolverse dándole prioridad a una norma sobre otra.
- *Réplica*: Pero esto no siempre es posible.

- ¿Qué principios o reglas obedece el concepto de verdad?

$$Tr\text{-intro}\ \frac{A}{\text{`}A\text{' } \textit{es verdadera}} \qquad\qquad Tr\text{-elim}\ \frac{\text{`}A\text{' } \textit{es verdadera}}{A}$$

- Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje que contiene nombres para sus propias oraciones y sea $\mathcal{L}_{Tr}$ el resultado de extender $\mathcal{L}$ con el predicado $Tr(x)$.
- Si A es una oración de $\mathcal{L}_{Tr}$, diremos que $\langle A\rangle$ es una constante de individuo (i.e. un nombre) que denota la oración A.
- Desde un punto de vista intuitivo, entonces, $Tr\langle A\rangle$ expresa la idea de que A es una oración verdadera.

- *El problema*: *Tr*-intro y *Tr*-elim son conjuntamente incompatibles con la lógica clásica si el lenguaje que utilizamos tiene los recursos expresivos mencionados más arriba.
- La oración del mentiroso:

$$\lambda := \neg Tr\langle\lambda\rangle.$$

- Intuitivamente, esta oración es falsa si es verdadera, y es verdadera si es falsa.
- El defensor de los cúmulos de valores de verdad dirá que λ es verdadera *y* falsa.

- *Objeción I*: La oración del mentiroso carece de significado.
- *Réplica*: ¿Qué hay de la oración 'esta oración tiene cinco palabras'?

- *Ojbeción II*: La oración del mentiroso no es verdadera ni falsa.
- *Réplica*: Considere la oración 'esta oración es falsa o no es ni verdadera ni falsa'.

Términos no referenciales

- Ciertas oraciones que contienen términos no referenciales (como 'Sherlock Holmes' o 'el número entero más grande') no puede ser verdaderas ni falsas.
- 'Papá Noel no existe' y 'El entero más grande no existe' son verdaderas.
- 'A Sherlock Holmes le gusta la paella valenciana' y 'El número entero más grande es par' no son verdaderas ni falsas.
- Bertrand Russell vs Peter Strawson sobre las descripciones definidas.
- Oraciones literalmente falsas y paráfrasis.

Futuros contingentes

- Aristóteles y el argumento de la batalla naval.
- Consideremos la oración 'habrá una batalla en 2027 por las islas Malvinas'. Si dicha oración es verdadera ahora, es necesariamente el caso que habrá una batalla en 2027 por las islas Malvinas. Si dicha oración es falsa ahora, es necesariamente el caso que no habrá una batalla en 2027 por las islas Malvinas.
- Si asumimos que todas las oraciones son verdaderas o falsas ahora, entonces el futuro está determinado.
- Pero esto no puede ser así, dado que lo que ocurra en el futuro es un asunto contingente.
- Luego, las oraciones contingentes que hablan acerca del futuro no son ni verdaderas ni falsas *ahora*.

Futuros contingentes

- El argumento de Aristóteles contiene una falacia de ambigüedad.
- Las oraciones de la forma 'Si A, entonces necesariamente B' pueden formalizarse de dos formas distintas: $\Box(A \supset B)$ o $A \supset \Box B$.
- Si la formalizamos como $\Box(A \supset B)$, el argumento es inválido, pues $A, \Box(A \supset B) \not\models \Box B$.
- Si la formalizamos como $A \supset \Box B$, el argumento es válido ($A, A \supset \Box B \models \Box B$) pero no hay razón alguna para aceptar la premisa.

Información

Deberíamos ser capaces de razonar en contextos en los cuales recibimos información incompleta y/o inconsistente.

Bibliografía

1. G. Priest *An Introduction to Non-classical Logics*, Cambridge University Press, New York, 2008 (2nd edition).