Secuentes para (algunas) lógicas multivaluadas

Las lógicas multivaluadas K_3 y LP

Modelos

- Trabajaremos con un lenguaje proposicional $\mathcal{L}$ que incluye una negación $\neg$, una conjunción $\wedge$ y una disyunción $\vee$. El condicionial $A \supset B$ puede definirse de esta forma: $\neg A \vee B$.
- Definiremos la relación de consecuencia para $\mathcal{L}$ en base a estructuras $\mathcal{M}$ de la forma $< \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} >$, donde $\mathcal{V}$ es un conjunto no vacío de valores de verdad, $\mathcal{D}$ es el conjunto de valores designados, y $\mathcal{O}$ es un conjunto de funciones que se corresponden con las conectivas.
- Una interpretación v es una función que asigna valores en $\mathcal{V}$ a las fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$ respetando las funciones presentes en $\mathcal{O}$.
- $\Gamma \vDash \Delta$ si y sólo si no existe una interpretación v tal que $v(A) \in \mathcal{D}$ para cada $B \in \Gamma$ y $v(B) \notin \mathcal{D}$ para toda $B \in \Delta$. Es decir, no existe una interpretación v que le asigne una valor designado a todas las premisas y un valor no designado a todas las conclusiones.
- Las lógicas K_3 y LP son ambas lógicas trivaluadas que comparten las conectivas lógicas. Es decir, en ambas $\mathcal{D} = \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ y $\mathcal{O}$ puede definirse a partir de las siguientes identidades:
  - $v(\neg A) = 1 - v(A)$
  - $v(A \wedge B) = min(A, B)$
  - $v(A \vee B) = max(A, B)$
- La diferencia ente K_3 y LP tiene que ver con el conjunto de valores designados $\mathcal{D}$. En el caso de K_3, $\mathcal{D} = \{1\}$. En el caso de LP, $\mathcal{D} = \{1, \frac{1}{2}\}$.
- Es decir, en el caso de K_3 un argumento válido preserva verdad, mientras que en el caso de LP un argumento válido preserva verdad o verdad-y-falsedad.
- Más formalmente, $\Gamma \vDash_{K_3} \Delta$ si y sólo si para toda interpretación v, si $v(A) = 1$ para toda A en Γ, entonces $v(B) = 1$ para alguna B en Δ.
- $\Gamma \vDash_{LP} \Delta$ si y sólo si para toda interpretación v, si $v(A) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ para toda A en Γ, entonces $v(B) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ para alguna B en Δ.
- Esta diferencia en la definición de validez tiene un impacto profundo en el conjunto de argumentos que se consideran válidos en una y otra lógica.

Secuentes

- Un *secuente* para K_3 o LP es un objeto de la forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$ donde Γ y Δ son colecciones de fórmulas.
- La lectura del secuente no difiere de la usual: $\Gamma \Rightarrow \Delta$ indica que si aceptamos todas las oraciones de Γ, no podemos rechazar todas las oraciones de Δ.

Definición El sistema LK_3 contiene los siguientes secuentes iniciales (axiomas) y las siguientes reglas (Γ, Δ, Π y Σ son multiconjuntos de fórmulas):

Secuentes iniciales

$$\text{Ax}\ \frac{}{A \Rightarrow A}$$

Reglas estructurales

$$Corte\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Pi, A \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$\text{L}W\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}W\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}$$

$$\text{L}C\ \frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}C\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}$$

Reglas operacionales

$$\text{L}\neg\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{L}\neg\neg\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg\neg\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg A, \Delta}$$

$$\text{L}\wedge\ \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Pi \Rightarrow B, \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow A \wedge B, \Delta, \Sigma}$$

$$\text{L}\neg\wedge\ \frac{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta \qquad \Pi, \neg B \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, \neg(A \wedge B) \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \text{R}\neg\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \neg A, \neg B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(A \wedge B), \Delta}$$

$$\text{L}\vee\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Pi, B \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, A \vee B \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta}$$

$$\text{L}\neg\vee\ \frac{\Gamma, \neg A, \neg B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(A \vee B) \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta \qquad \Pi \Rightarrow \neg B, \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \neg(A \vee B), \Delta, \Sigma}$$

Definición El sistema LLP contiene los mismos secuentes iniciales y las mismas reglas que LK_3 excepto por la regla L$\neg$, que es reemplazada por la siguiente regla:

$$\text{R}\neg\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta}$$

Algunos ejemplos

En LK_3 tenemos:

- $\neg\neg p \Rightarrow p$

$$\text{L}\neg\neg\,\dfrac{p \Rightarrow p}{\neg\neg p \Rightarrow p}$$

- $\neg(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow p \vee q$

$$\text{R}\vee\,\dfrac{\text{L}\neg\wedge\,\dfrac{\text{L}\neg\neg\,\dfrac{p \Rightarrow p}{\neg\neg p \Rightarrow p} \qquad \text{L}\neg\neg\,\dfrac{q \Rightarrow q}{\neg\neg q \Rightarrow q}}{\neg(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow p, q}}{\neg(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow p \vee q}$$

- $p \wedge \neg p \Rightarrow q$

$$\text{L}\wedge\,\dfrac{\text{R}W\,\dfrac{\text{L}\neg\,\dfrac{p \Rightarrow p}{p, \neg p \Rightarrow}}{p, \neg p \Rightarrow q}}{p \wedge \neg p \Rightarrow q}$$

En LLP tenemos:

- $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(p \vee q)$

$$\text{L}\neg\vee\,\dfrac{\text{R}\neg\wedge\,\dfrac{\neg p \Rightarrow \neg p \qquad \neg q \Rightarrow \neg q}{\neg p, \neg q \Rightarrow \neg p \wedge \neg q)}}{\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q}$$

- $\Rightarrow p \vee \neg p$

$$\text{R}\vee\,\dfrac{\text{R}\neg\,\dfrac{p \Rightarrow p}{\Rightarrow p, \neg p}}{\Rightarrow p \vee \neg p}$$

- $\Rightarrow \neg p \vee (\neg q \vee p)$

$$\text{R}\vee\,\dfrac{\text{R}\vee\,\dfrac{\text{R}\neg\,\dfrac{\text{R}W\,\dfrac{p \Rightarrow p}{p \Rightarrow p, \neg q}}{\Rightarrow \neg p, \neg q, p}}{\Rightarrow \neg p, \neg q \vee p}}{\Rightarrow \neg p \vee (\neg q \vee p)}$$

Algunas propiedades interesantes de LK_3 y LLP

- Tenemos reglas izquierdas y derechas para cada conectiva *y para cada conectiva negada*.
- En LK_3 no hay una regla de introducción a la derecha para la negación, mientras que en LLP no hay una regla de introducción a la izquierda para la negación.
- Si bien tenemos reglas que no están presentes en LK, todas ellas son derivables en LK, de modo que tanto LK_3 como LLP son estrictamente más débiles que LK.
- En LK_3 no será posible probar $\Rightarrow p, \neg p$, mientras que en LLP no será posible probar $p, \neg p \Rightarrow$.
- En $LK3$ no hay ningún secuente derivable de la forma $\Rightarrow A$. Es decir, no hay teoremas.
- Esto es fácil de demostrar mirando la forma de las reglas del cálculo: ninguna regla (con la excepción de RW) nos permite introducir algo a la derecha si no había ya algo ahí!
- Dualmente, en LLP no hay ningún secuente derivable de la forma $A \Rightarrow$. Es decir, no hay contradicciones, entendiendo por 'contradicciones' fórmulas que tienen el valor no designado en todas las interpretaciones.
- Esto es igualmente fácil de demostrar: ninguna regla (excepto por LW) nos permite introducir algo a la izquierda si no había ya algo ahí!
- En LK_3 vale lo siguiente: $A \Rightarrow$ tiene una prueba en LK_3 si y sólo si $A \Rightarrow$ tiene una prueba en LK.
- En LLP vale lo siguiente: $\Rightarrow A$ tiene una prueba en LLP si y sólo si $\Rightarrow A$ tiene una prueba en LK.

Completitud y Corrección

- *Corrección*: Si hay una derivación de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ en LK_3, entonces $\Gamma \vDash_{K_3} \Delta$.
- *Completitud*: Si $\Gamma \vDash_{K_3} \Delta$, entonces hay una derivación de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ en LK_3.
- Estos resultados también se cumplen para LP y LLP.

Ejercicios

1. Determine si los siguientes secuentes tienen prueba en LK_3 o en LLP. En caso de que tengan una prueba, constrúyala; en caso de que no la tengan, ofrezca un contramodelo.

   a) $\Rightarrow \neg(p \wedge \neg p)$

   b) $\neg(p \vee \neg p) \Rightarrow$

   c) $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$

   d) $p \wedge \neg p \Rightarrow q \vee \neg q$

2. Utilizando la noción semántica de consecuencia lógica para K_3 y LP muestre que K_3 no tiene tautologías y que LP no tiene contradicciones. (Sugerencia: considere la interpretación que asigna a todas las variables proposicionales el valor $\frac{1}{2}$).

3. Considere un cálculo de secuentes que es idéntico a LK excepto porque no tiene ni L$\neg$ ni R$\neg$. ¿Qué sistema obtenemos si hacemos eso?¿Le parece un sistema interesante? Sí/no. ¿Por qué?

4. Considere la siguiente noción de consecuencia $\vDash_?$: $\Gamma \vDash_? \Delta$ si y sólo si $\Gamma \vDash_{K_3} \Delta$ o $\Gamma \vDash_{LP} \Delta$. ¿Es $\vDash_?$ la noción de consecuencia clásica? (Sugerencia: ¿Qué ocurre con la inferencia $p \supset q, p \vDash_? q \wedge (r \vee \neg r)$?)

5. Considere la siguiente noción de consecuencia $\vDash_{??}$: $\Gamma \vDash_{??} \Delta$ si y sólo si para toda interpretación v, si $v(A) = 1$ para toda $A \in \Gamma$, entonces $v(B) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ para alguna $B \in \Delta$. ¿Es $\vDash_{??}$ la noción de consecuencia clásica? (Sugerencia: Piense qué tiene que ocurrir para que un argumento sea inválido en $\vDash_{??}$).

Projecto I

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional que contiene nombres para sus propias oraciones y sea $\mathcal{L}_{Tr}$ el resultado de extender $\mathcal{L}$ con el predicado $Tr(x)$. Si A es una oración de $\mathcal{L}_{Tr}$, diremos que $\langle A\rangle$ es una constante de individuo (i.e. un nombre) que denota la oración A. Desde un punto de vista intuitivo, entonces, $Tr\langle A\rangle$ expresa la idea de que A es una oración verdadera. En un cálculo de secuentes, parece plausible suponer que el predicado $Tr(x)$ satisface las siguientes reglas:

$$\mathrm{L}Tr\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, Tr\langle A\rangle \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \mathrm{R}Tr\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow Tr\langle A\rangle, \Delta}$$

Si omitimos el contexto, la primera regla nos dice que si rechazamos A, rechazamos que A sea verdadera y la segunda regla nos dice que si aceptamos A, aceptamos que A es verdadera.

Ahora consideremos una oración λ que expresa su propia falta de verdad:

$\lambda := \neg Tr\langle\lambda\rangle$.

En un cálculo de secuentes podemos realizar la siguiente derivación (donde A representa la oración 'Donald Trump es una gran persona'):

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{R}C\ \dfrac{\mathrm{R}Tr\ \dfrac{\mathrm{Def}\ \lambda\ \dfrac{\mathrm{R}\neg\ \dfrac{Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow Tr\langle\lambda\rangle}{\Rightarrow \neg Tr\langle\lambda\rangle, Tr\langle\lambda\rangle}}{\Rightarrow \lambda, Tr\langle\lambda\rangle}}{\Rightarrow Tr\langle\lambda\rangle, Tr\langle\lambda\rangle}}{\Rightarrow Tr\langle\lambda\rangle} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow Tr\langle\lambda\rangle}{Tr\langle\lambda\rangle, \neg Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow}\ \mathrm{L}\neg}{Tr\langle\lambda\rangle, \lambda \Rightarrow}\ \mathrm{Def}\ \lambda}{Tr\langle\lambda\rangle, Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow}\ \mathrm{L}Tr}{Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow}\ \mathrm{L}C}{\mathrm{R}W\ \dfrac{\Rightarrow}{\Rightarrow A}}\ corte$$

Esta derivación se conoce con el nombre de 'paradoja del mentiroso'. Teniendo esto en cuenta, reflexione acerca de los siguientes puntos:

- Viendo las reglas que se utilizaron en la derivación, ¿qué opciones tenemos para evitar concluir que Donal Trump es una gran persona? ¿Hay alguna forma de bloquear la derivación manteniendo la lógica clásica?
- ¿Vale la derivación en los sistemas LK_3 y LLP? ¿Qué nos indica cada lógica con respecto a nuestra actitud de aceptación y/o rechazo para con λ?
- Aunque la derivación ofrecida más arriba es ilegítima en la lógica intuicionista, hay otra forma de llegar a la conclusión de que Donal Trump es una gran persona en el sistema LJ. Encuéntrela!

Projecto II

Un problema que se le ha atribuido a la lógica LP es que su condicional es demasiado débil. En particular, dicho condicional no satisface la regla de *modus ponens*, ya que existen valuaciones que le asignan $\frac{1}{2}$ a p y a $p \supset q$, pero 0 a q.

Si queremos defender la lógica LP, es necesario ocuparse de este asunto. Para ello hay básicamente dos opciones. O bien introducimos un nuevo condicional primitivo, o bien intentamos explicar en qué sentido el condicional de LP es útil a pesar de no satisfacer una regla tan básica como *modus ponens*.

Recientemente, en [1] Beall ha defendido esta última opción basándose en la siguiente idea. Aunque el condicional de LP no satisfaga *modus ponens*, satisface (si admitimos conclusiones múltiples, como en LLP) la siguiente inferencia: $A, A \supset B \Rightarrow B, A \wedge \neg A$. Por lo tanto, si aceptamos A y aceptamos $A \supset B$, la lógica nos da dos posibilidades: o aceptamos B o aceptamos que A es una contradicción. Sobre la base de ciertas ideas de Harman [2], Beall sugiere que la lógica debe ir acompañada de principios pragmáticos de aceptación y rechazo. Por ejemplo, un principio pragmático plausible podría ser: *las contradicciones deben ser rechazadas*. Si esto es así, la inferencia anterior más el principio pragmático nos dan una versión de *modus ponens*. Por supuesto, puede haber contextos donde el principio pragmático falle, como los relacionados con oraciones paradójicas o con normas inconsistentes. En esos casos, en lugar de aplicar *modus ponens* y deducir B, deberíamos inferir simplemente que A es una contradicción.

Teniendo en cuenta estas cuestiones, reflexione acerca de los siguientes puntos:

- En la propuesta de Beall, la lógica no nos *obliga* a inferir una conclusión a partir de determinadas premisas sino que nos ofrece una serie de conclusiones posibles. En otras palabras, la lógica meramente *restringe* el conjunto de oraciones que podemos inferir a partir de determinadas premisas. ¿Le parece satisfactoria esta propuesta? ¿Cree usted que la lógica debe ir acompañada de principios pragmáticos de aceptación y rechazo que nos indiquen cuál de todas las múltiples conclusiones posibles debemos inferir?

- En el caso de que K_3, el condicional también es muy débil, pues la oración $p \supset p$ no es una tautología. Indique si es posible ofrecer un argumento análogo al de Beall para K_3.

- Una alternativa a la propuesta de Beall es introducir un operador de consistencia $\circ$ definido de la siguiente forma:

	$\circ$
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	1

  Intuitivamente, $\circ A$ debe entenderse como A es consistente. De esta forma, está claro que si bien *modus ponens* es una regla inválida, sí se cumple la siguiente versión de *modus ponens*: $\circ A, A, A \supset B \vDash_{LP} B$. ¿Le parece que esta propuesta es superior a la de Beall? ¿Qué ocurre con la oración $\circ \circ A$?

Referencias

[1] J.C. Beall. Free of Detachment: Logic, Rationality and Gluts. *Nous*, en prensa.

[2] G. Harman. *Change in View: Principles of Reasoning.* MIT Press, Cambridge, Mass, 1986.