Lógica

Propiedades metalógicas de las nociones de consecuencia

$\vdash$ / $\models$

Profesor: Eduardo Barrio
UBA - Filosofía
2do cuatrimestre de 2016

¿Hay un sistema lógico que sea consistente y completo?

$\vdash$ / $\models$

Consistencia: que no pruebe algo y su negación

Completitud: que pruebe todo lo que sea lógicamente verdadero

La consistencia y completitud de la lógica clásica

La lógica proposicional es:

- Correcta: $\Gamma \vdash A \;\Rightarrow\; \Gamma \vDash A$ $\qquad \vdash A \;\Rightarrow\; \vDash A$

- Consistente $\nvdash A$ y $\neg A$

- Completa $\Gamma \vDash A \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash A$ $\qquad \vDash A \;\Rightarrow\; \vdash A$

- Decidible: Hay un algoritmo que decide todas las verdades lógicas.

La consistencia y completitud de la lógica clásica

La lógica de primer orden (cuantificacional) es:

- Correcta: $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \vDash A$ $\qquad \vdash A \Rightarrow \vDash A$

- Consistente $\nvdash A$ y $\neg A$

- Completa $\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma \vdash A$ $\qquad \vDash A \Rightarrow \vdash A$

- Indecidible: No hay un algoritmo que decida todas las verdades lógicas.

Importancia de la lógica clásica

Permite abordar con claridad y precisión una serie de problemas vinculados a los conceptos de demostración, consecuencia, verdad, algoritmo, etc.

Permite abordar el problema de la fundación de la matemática:

- ¿Puede fundarse la matemática en la lógica?

- ¿Todo problema acerca de números / conjuntos es un problema lógico?

- ¿Hay algún límite a los problemas computacionalmente resolubles?

Los 23 problemas de Hilbert (1900)

David Hilbert

1er problema: La hipótesis del continuo (esto es, no existe conjunto cuyo tamaño esté estrictamente entre el de los enteros y el de los números reales)

2do Problema: La consistencia de la aritmética

8vo Problema: La conjetura de Golbach. (cada número par mayor que 2 se puede escribir como la suma de dos números primos).

Estado de los problemas de Hilbert

Primer Teorema de Gödel: Hay afirmaciones de la aritmética que son indecidibles. (8vo problema) (‘30s)

Segundo Teorema de Gödel: No hay una prueba de la consistencia de la aritmética en la aritmética. (2do Problema) (‘30s)

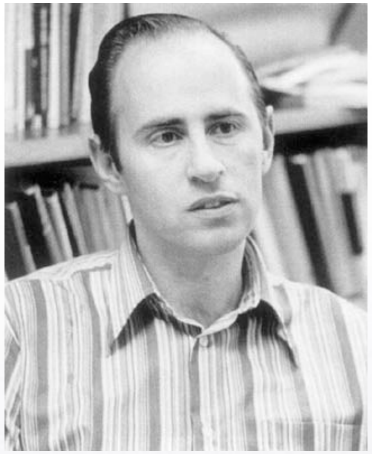
Estado de los problemas de Hilbert

Segundo Teorema de Gödel: No hay una prueba de la consistencia de ZF en ZF. ('30)

Estado de los problemas de Hilbert

Hipótesis del continuo: Paul Cohen ha probado (‘60) la imposibilidad de probarla como verdadera o como falsa mediante los axiomas de ZF. (es independiente).

- No hay consenso al respecto de considerar esto como solución al problema



Paul Cohen

•

Más resultados limitativos

(Tarski Schema) $\quad True(A) \leftrightarrow A$

$\neg True(Q) \leftrightarrow Q$ Yo no soy verdadera

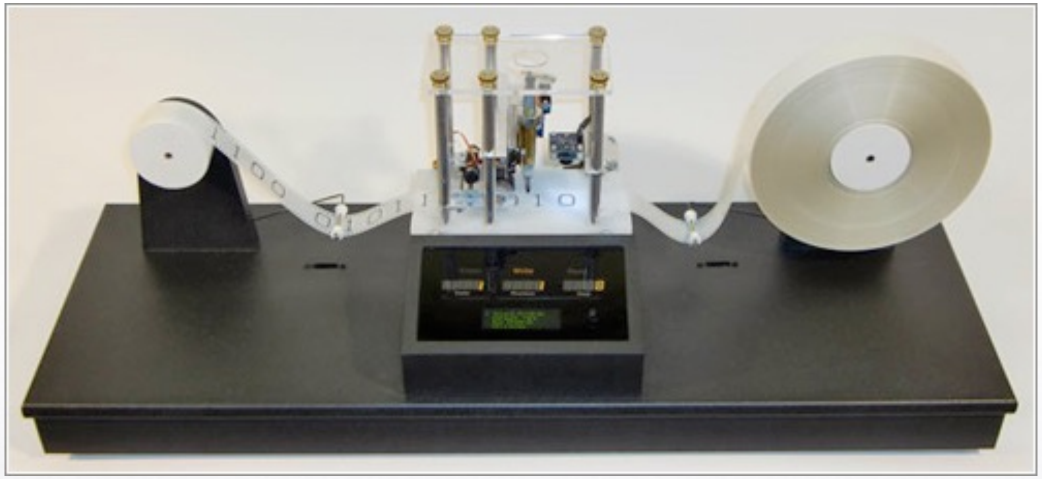
$\neg True(Q) \leftrightarrow True(Q)$

$\neg\, True(Q) \wedge True(Q)$

Teorema de Tarski: la noción de *verdad aritmética* no es definible en la aritmética ('30s)

Alfred Tarski

Más resultados limitativos



Máquina de Turing (30s)

Más resultados limitativos

Resultados de Turing: hay algunas funciones que no pueden ser computadas por una computadora.

Problema de la detención (30s): encontrar un procedimiento efectivo que, dado cualquier computadora y cualquier input, sea capaz de determinar si la computadora se detiene dado el input.

NO lo hay.

Alan Turing

¿Qué propiedades tiene la noción clásica de consecuencia lógica?

Metateorema de la deducción:

Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

El Metateorema de la Deducción:

Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

Derivación de B desde $\Gamma \cup \{A\}$: 1 paso

$\Gamma \cup \{A\}$: 1 paso
B
B es Ax o es A o está en Γ

Probar que existe una derivación de n pasos de

$\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

El Metateorema de la Deducción:

Caso 1: B es un axioma de SP

La siguiente es una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ

Prueba:

1.- B	Axioma de SP, por Hip.
2.- $(B \rightarrow (A \rightarrow B))$	Axioma, por SP1
3.- $(A \rightarrow B)$	MP 1 y 2

El Metateorema de la Deducción:

Caso 2: B está en Γ

La siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ

Prueba:

1.- B	Miembro de Γ por Hip.
2.- $(B \to (A \to B))$	Axioma, por SP1
3.- $(A \to B)$	MP 1 y 2

El Metateorema de la Deducción:

Caso 3: B es A

La siguiente es una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ

Prueba:

Por lo tanto, $(A \rightarrow B) \equiv (A \rightarrow A)$. Luego, la siguiente es una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ:

1. $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A))$ Axioma, por SP1
2. $((A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)))$
   Axioma, por SP2
3. $((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ MP1,2
4. $(A \rightarrow (A \rightarrow A))$ Axioma, por SP1
5. $(A \rightarrow A)$ MP3,4

El Metateorema de la Deducción:

Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

$\Gamma \cup \{A\}$: k pasos

...

B

B es Ax o es A o está en Γ o se obtiene por MP

Derivación de B desde $\Gamma \cup \{A\}$: k pasos

Probar que existe una derivación de n pasos de

$\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

El Metateorema de la Deducción:

Paso Inductivo:

Hipótesis inductiva: Si existe una derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ en un número de pasos menor a k $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

Tesis inductiva: Si existe una derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ en un número k de pasos $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

El Metateorema de la Deducción:

Caso nuevo: B se obtiene como consecuencia de dos fórmulas anteriores en la derivación, por MP.

Sean Ci y Cj las fórmulas anteriores, donde i y j indican el lugar que ocupan en la derivación de B a partir de $\Gamma \cup A$ y, por ende, $i < k$ y $j < k$. Luego, una de ellas debe tener forma condicional, tal que su antecedente está constituido por la otra y su consecuente por B. Sin perdida de generalidad diremos que:

$Ci \equiv (Cj \rightarrow B)$

Entonces, $\Gamma \cup A \vdash (Cj \rightarrow B)$ y $\Gamma \cup A \vdash Cj$.

Como $i < k$ y $j < k$, por hipótesis inductiva tenemos que

$\Gamma \vdash (A \rightarrow (Cj \rightarrow B))$ y
$\Gamma \vdash (A \rightarrow Cj)$.

El Metateorema de la Deducción:

Caso 4: B se obtiene como consecuencia de dos fórmulas anteriores en la derivación, por MP.

La siguiente es una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ:

1 $(A \rightarrow (C_j \rightarrow B))$

2 $(A \rightarrow C_j)$

3 $((A \rightarrow (C_j \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C_j) \rightarrow (A \rightarrow B)))$ Axioma,por SP2

4 $((A \rightarrow C_j) \rightarrow (A \rightarrow B))$ MP1,3

5 $(A \rightarrow B)$ MP 2,4

El Metateorema de la Deducción:

Luego, por el **Principio de Inducción Matemática Completa**, tenemos que,

Para cualquier natural n, si existe una derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ en n pasos, entonces $(A \rightarrow B)$ es derivable de Γ

o, lo que es lo mismo, si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, entonces $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

El Metateorema de Corrección:

$$\vdash A \;\Rightarrow\; \vDash A$$

Prueba:

- Los axiomas son lógicamente válidos.
- El MP preserva la verdad

Las demostraciones preservan la verdad

Prueba por inducción:

Para todo número natural n, el enunciado demostrado en una demostración de n pasos es una fórmula lógicamente válida.

El Metateorema de Corrección:

$$\vdash A \;\Rightarrow\; \models A$$

Estrategia de la Prueba por inducción:

Caso Base: Para demostraciones de 1 paso, el enunciado demostrado lógicamente válido.

Paso inductivo: Si el teorema vale para demostraciones de un largo menor a k pasos, también vale para una demostración de k pasos.

Hipótesis inductiva: un enunciado demostrado en una demostración de longitud menor a k es una fórmula lógicamente válida.
Tesis inductiva: un enunciado demostrado en una demostración de longitud k es una fórmula lógicamente válida.

El Metateorema de Consistencia Simple:

$\nvdash A$ y $\neg A$

Estrategia de la Prueba por Absurdo:

Suponer que hay una A tal que $\vdash A$ y $\vdash \neg A$
Usar corrección: $\models A$ y $\models \neg A$
Absurdo!