Lógica

Completitud

$\vdash$ / $\models$

Profesor: Eduardo Barrio
UBA - Filosofía
2do cuatrimestre de 2013

Un sistema lógico completo prueba todo lo que es lógicamente verdadero

$\vDash$ / $\vdash$

Completitud: El sistema deductivo de SP prueba todas las tautologías

- El conjunto de tautologías es infinito, la completitud garantiza la existencia de una prueba para cada una de las fórmulas que son tautologías.

- Por supuesto, los seres humanos no hemos realizado todas estas pruebas (ni podremos hacerlo)

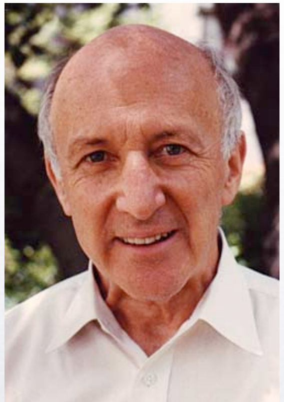
La completitud de la lógica clásica

La lógica proposicional es:

- Completa $\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma \vdash A$ $\vDash A \Rightarrow \vdash A$

Prueba de completitud

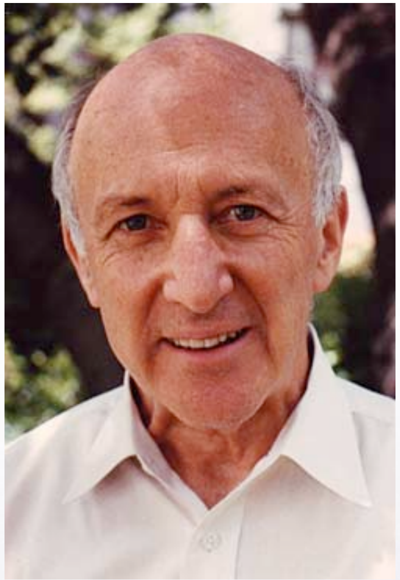
Prueba de Post (‘20s)
Prueba de Kalmar (‘20s)
Prueba de Gödel: (‘30s)



Prueba de Completitud de Henkin: Usa un lema vinculando consistencia y satisfacibilidad (‘40s)

El problema de la prueba de Completitud

Estrategia de la prueba de Henkin:



- Corrección fuerte $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$

- La prueba condicional asume la existencia de un objeto finito (una prueba)
- El número de pasos puede ser cualquier n
- La inducción nos permite proceder

Completitud: $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$

- ***Complejidad del problema:*** el antecedente nos dice simplemente que **no existe una valuación** con ciertas características.
- No hay datos acerca de Γ (ni de su estructura) ni de la distancia desde Γ a A.

El Metateorema de Completitud:

$$\Gamma \vDash A \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma \vdash A$$

$\Gamma \cup \{ \neg A \}$

Es insatisfacible

Es inconsistente

- Todo conjunto insatisfacible es inconsistente.

- Todo conjunto consistente es satisfacible.

El Metateorema de Completitud:

Estrategia de la Prueba de Henkin

Paso 1: suponer $\Gamma \vDash A$

Paso 2: Definir $\Gamma \vDash A$:

Toda V tal que V(Γ): 1, V(A): 1

Paso 3: Asociar el conjunto $\Gamma \cup \{ \neg A \}$

$\neg \exists$V tal que V(Γ): 1 & V($\neg$A): 1

Paso 4: el conjunto $\Gamma \cup \{ \neg A \}$ es insatisfacible

Paso 8 :

$\Gamma \vdash A$

Paso 7 :

Si el conjunto $\Gamma \cup \{ A \}$ es consistente, $\Gamma \vdash A$

Paso 6: el conjunto $\Gamma \cup \{ A \}$ es consistente

Paso 5: el conjunto $\Gamma \cup \{ \neg A \}$ es inconsistente

Satisfacible $\Rightarrow$ Consistente

Todo conjunto satisfacible es consistente

Si Γ es satisfacible, entonces Γ es consistente

Prueba:

- Γ es satisfacible Supuesto
- Γ es inconsistente Supuesto
- $\exists V \; V(\Gamma) = 1$
- $\exists A \; \Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash \neg A$ Por 2, ya que Γ es inconsistente
- $\exists V$ (A)=1 y V($\neg$ A) =1 De 3 y 4.
- Γ es consistente Absurdo en 5
- Si Γ es satisfacible entonces es consistente TD 1- 6

Consistente $\Rightarrow$ Satisfacible

Todo conjunto consistente es satisfacible

Si Γ es consistente, entonces Γ es satisfacible

¿Qué sabemos de Γ?

- Γ está compuesto por fórmulas bien formadas.

  - no sabemos mucho mas...

- Hay fórmulas de tres tipos: Símbolos proposicionales - Negaciones - Condicionales

- No sabemos nada del tamaño de Γ, aunque como máximo será infinito enumerable.

Consistente ⇒ Satisfacible

Objetivo inicial:

Dado un Γ consistente cualquiera, construir una V que asigne 1 a los elementos de Γ .

Complicación:

Las valuaciones (los modelos) son tales que para toda fórmula X del lenguaje L,
o bien V(X):1 o V($\neg$X):1
No hay suficiente información en el conjunto $\Gamma \cup \{ \neg A \}$ para construir un modelo.

Para que un conjunto de fórmulas pueda ser un buen candidato a la representación de un modelo hay que conseguir añadirle tantas fórmulas como sea posible sin perder en ningún momento la consistencia.

Objetivo reformulado: Construir un modelo canónico:

Dado un Γ consistente cualquiera, construir una V que asigne 1 a los elementos de Γ y 0 a las fórmulas que no están en Γ.

Conjuntos Maximales Consistentes

¿Qué sabemos de Γ?

- Hay fórmulas de tres tipos: Símbolos proposicionales - Negaciones - Condicionales
- Debemos extender Γ y poder “recorrerlo” todo:

Estrategia: clasificar por su complejidad las fórmulas de Γ.
Listarlas:
Complejidad: cantidad de conectivos dentro de una fórmula bien formada. Γ?

Un conjunto Γ es maximal consistente ssi es consistente y para toda fórmula A del lenguaje cumple:

- o bien A está en Γ o $\neg$A está en Γ

Dos Lemas acerca de los conjuntos consistentes:

Metateorema de enumeración: existe una enumeración efectiva de todos las fórmulas del lenguaje

Lema de Lindenbaum:

- Todo conjunto consistente Γ es un subconjunto de un maximal consistente Γ_{max}.

Todo conjunto consistente puede extenderse a un maximal consistente

Inducción matemática

Teorema de la deducción

Lema de Henkin:

Todo conjunto consistente es satisfacible

Metateoremas 5.4, 5.5, 5.6

Metateorema 5.4: Si Γ es maximal consistente, para toda A o bien A está en Γ o bien $\neg A$ está en Γ, pero no ambas.

Metateorema 5.5: Si Γ es maximal consistente y $\Gamma \vdash A$ entonces $\Gamma \in A$

Metateorema 5.6: Hay una enumeración efectiva de todas las fórmulas de P.

Lema de Lindenbaum

Todo conjunto consistente es un subconjunto de un maximal consistente

Estrategía de la Prueba:

- Utilizando el metateorema de enumeración, definimos la expansión de un Γ consistente, obteniendo Γ^{Max}.
- Para toda A o bien A está en Γ^{Max} o bien A U Γ^{Max} es inconsistente.

Secuencia infinita S: $\{ \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_n \}$ de Γ cada vez más grandes

- $\Gamma_0 : \Gamma$
- Si $\Gamma_n \cup \{ A_{n+1} \}$ es inconsistente $\Rightarrow$ Γ_{n+1} es igual a Γ_n
- Si $\Gamma_n \cup \{ A_{n+1} \}$ es consistente $\Rightarrow$ Γ_{n+1} es igual a $\Gamma_n \cup \{ A_{n+1} \}$
- Γ^{Max} es la secuencia de todos los $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_n$

Lema de Henkin

Todo conjunto consistente es satisfacible

Estrategía de la Prueba:

- Utilizando el lema de Lindenbaum, se construye un conjunto maximal consistente a partir de cualquier conjunto Γ consistente, obteniendo Γ^{Max}.

- Se define una valuación que asigne 1 a toda fórmula de Γ^{Max} y 0 a toda fórmula que no está en Γ^{Max}

- Se prueba por inducción matemática sobre el número de conectivas de A, que

Para toda A, $V(A){:}1 \Leftrightarrow A \in \Gamma^{Max}$.

Caso base: A es un símbolo proposicional
Paso inductivo:
HI: $V(A){:}1 \Leftrightarrow A \in \Gamma^{Max}$ para toda A de complejidad menor a k

Sea A de complejidad igual a k
Hay dos casos: (i) $A = \neg B$
(ii) $A = B \rightarrow C$

Lema de Henkin

Todo conjunto consistente es satisfacible

- Se prueba por inducción matemática sobre el número de conectivas de A, que

Para toda A, $V(A){:}1 \Leftrightarrow A \in \Gamma^{Max}$.

Paso inductivo:

HI: $V(A){:}1 \Leftrightarrow A \in \Gamma^{Max}$ para toda A de complejidad menor a k

caso (i) A tiene complejidad k y $A = \neg B$

($\Rightarrow$) - $V(A){:}1 \Rightarrow V(\neg B){:}1 \Rightarrow V(B){:}0 \Rightarrow$ Por HI $B \notin \Gamma^{Max} \Rightarrow \neg B \in \Gamma^{Max} \Rightarrow A \in \Gamma^{Max}$

($\Leftarrow$) - $A \in \Gamma^{Max} \Rightarrow B \notin \Gamma^{Max} \Rightarrow$ Por HI $V(B){:}0 \Rightarrow V(\neg B){:}1 \Rightarrow V(A){:}1$

Lema de Henkin

Todo conjunto consistente es satisfacible

- Se prueba por inducción matemática sobre el número de conectivas de A, que

Para toda A, $V(A){:}1 \Leftrightarrow A \in \Gamma^{Max}$.

Paso inductivo:
HI: $V(A){:}1 \Leftrightarrow A \in \Gamma^{Max}$ para toda A de complejidad menor a k

caso (i) A tiene complejidad k y $A = \neg B$

$(\Rightarrow)$ - $V(A){:}1 \Rightarrow V(\neg B){:}1 \Rightarrow V(B){:}0 \Rightarrow$ Por HI $B \notin \Gamma^{Max} \Rightarrow \neg B \in \Gamma^{Max} \Rightarrow A \in \Gamma^{Max}$

$(\Leftarrow)$ - $A \in \Gamma^{Max} \Rightarrow B \notin \Gamma^{Max} \Rightarrow$ Por HI $V(B){:}0 \Rightarrow V(\neg B){:}1 \Rightarrow V(A){:}1$

Lema de Henkin

Para todo conjunto Γ, Γ consistente si y sólo si es satisfacible

$\Gamma \cup \{ \neg A \}$ consistente si y sólo si es satisfacible

Metateorema 5.9

Metateorema 5.9: Si $\Gamma \cup \{\neg A\}$ es inconsistente, $\Gamma \vdash A$

Completitud Fuerte:

$$\Gamma \models A \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma \vdash A$$

$\Gamma \cup \{ \neg A \}$

Es insatisfacible

Es inconsistente

- Todo conjunto insatisfacible es inconsistente.

- Todo conjunto consistente es satisfacible.

Completitud de SP:

$\models A \quad \Rightarrow \quad \vdash A$

$\emptyset \cup \{ \neg A \}$

Es insatisfacible

Es inconsistente

- Todo conjunto insatisfacible es inconsistente.

- Todo conjunto consistente es satisfacible.

Metateorema 5.12:

$$\models A \qquad \Leftrightarrow \qquad \vdash A$$

Teorema de Corrección

Teorema de Completitud

Teorema de Finitud:

$\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma^0 \subseteq \Gamma$ y Γ^0 es finito $\Gamma^0 \vdash A$

Teorema de Compacidad:

Teorema de Compacidad:

Si todo Γ^0 finito e incluido Γ es satisfacible, Γ es satisfacible

Supongamos que Γ es insatifacible
Γ es inconsistente (Lema de Henkin)
Existe una A tal que $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash \neg A$
Se usan sólo finitos axiomas de Γ y la derivación es finita
Existe un Γ^0 que es finito tal que $\Gamma^0 \vdash A$ y $\Gamma^0 \vdash \neg A$
Γ^0 es inconsistente
Γ^0 es insatisfacible

$\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma^0 \subseteq \Gamma$ y Γ^0 es finito $\Gamma^0 \vDash A$

Esquema de las propiedades de SP

SP

TEORÍA DE MODELOS	TEORÍA DE LA PRUEBA
TAUTOLOGÍA Verdad en todo modelo	TEOREMA tiene una demostración en SP
Consecuencia semántica $\models$	Consecuencia sintáctica $\vdash$
Conjunto satisfacible (existe un modelo para todos los elementos)	Conjunto consistente (No permite probar A y $\neg$A)
Compacidad	Finitud