Corrección y Completitud de lógica clásica

Definición (fiel): Sea v una interpretación proposicional. Sea b una rama del tableau. Diremos que v es *fiel* a b sii para toda fórmula A en la rama, v(A)=1.

Lema de corrección:

Si v es fiel a una rama b del tableau, y se aplica una regla de tableau a b, entonces v es fiel a al menos una de las ramas que se generan.

Prueba:

Por casos.

(a) Condicional.
Negado. Supongamos que v es fiel a b, y que $\neg(A \supset B)$ occure en b, y aplicamos la regla a esa fórmula. Solo se extiende la rama, agregando A y ¬B a b. Como v es fiel a b, hace verdadera toda fórmula de b. Es decir, $v(\neg(A \supset B))=1$. Entonces por semántica v(A)=1 y v(B)=0, entonces v(¬B)=1. Por ende, v hace verdadera a toda fórmula de b.
Afirmado. Supongamos que v es fiel a b, y que $A \supset B$ ocurre en b, y aplicamos la regla a esa fórmula. Se abren dos ramas, una con ¬A y otra con B. Como v es fiel a b, hace verdadera a toda fórmula de b. Es decir, $v(A \supset B)=1$, entonces v(A)=0 (i.e. v(¬A)=1) o v(B)=1. Por lo tanto, v hace verdadera a alguna rama.
(b) Doble negación. Queda al lector.
(c) Conjunción. Queda al lector.
(d) Disyunción. Queda al lector. QED

Teorema de corrección: Para S finitas, si $S \vdash A$ entonces $S \vDash A$.

Prueba. Por contrapositiva. Suponemos que $S \nvDash A$ (para probar que $S \nvdash A$). Entonces hay una interpretación v que hace verdadera a toda fórmula de S y falsa a A (es decir, hace verdadera a ¬A).

Consideremos ahora un tableaux completo para la inferencia. Obviamente v es fiel a la parte inicial de la lista (i.e. las premisas). Cuando aplicamos una regla, por el lema de corrección tenemos garantizado que v será fiel a al menos una de las ramas que se abren (o a la rama que se extiende, si es una regla que no abre). Aplicando esto repetidamente podemos encontrar una rama entera b tal que v es fiel a toda la rama. Ahora bien, si b está cerrado, v no puede ser fiel a b. Por ende, b no está cerrado. Entonces hay una rama abierta en el tableau. Por ende, $S \nvdash A$. QED

Definición (interpretación inducida): Sea b una rama abierta. La interpretación *inducida* por b es una interpretación v tal que para cualquier parámetro proposicional p, si p está en b, v(p)=1; y si ¬p está en b, v(p)=0.

Lema de completitud: Sea b una rama *completa* del tableau. Sea v la interpretación inducida por b. Entonces:

Si A está en b, v(A)=1
Si ¬A está en b, v(A)=0
Prueba. Por inducción sobre la complejidad de A. Si A es un parámetro proposicional, esto es verdadero por definición. Si A es complejo, tiene algún conectivo.

(a) Conjunción.
A = (B ∧ C). Es decir, B∧C está en b. Como b es completo, la regla para la conjunción se aplicó. Entonces B y C están en b. Por inducción, v(B)=1 y v(C)=1. Por ende, v(B∧C)=1.
A = ¬(B ∧ C). Es decir, ¬(B∧C) está en b. Como b es completo, la regla para la conjunción (negada) se aplicó. Entonces o B o C están en b. Por inducción, v(B)=1 o v(C)=1. Por ende, v(¬(B∧C))=1.
(b) Disyunción. Queda al lector.
(c) Condicional. Queda al lector.
(d) Doble negación. Queda al lector. QED

Teorema de completitud: Para S finitas, si S ⊨ A entonces S ⊢ A.
Prueba: Probamos la contrapositiva. Supongamos que S ⊬ A (para probar que S⊭ A). Considere una tableau abierta *completa* para la inferencia, y elija una rama abierta b. La interpretación que induce b hace verdaderos a todos los miembros de S, y hace falso a Sm por el lema de completitud. Por ende, S ⊭ A.

Ejercicios:

1. Pruebe el lema de corrección para la conjunción.
2. Prueba el lema de completitud para la disyunción.
3. *Compare esta prueba con la que aprendió en Lógica 1 para lógica proposicional. ¿Qué tienen en común?