Introducción al cálculo de secuentes

Diego Tajer

April 4, 2017

El cálculo de secuentes es una manera de presentar un sistema de deducción natural. Intuitivamente, un secuente es un enunciado del tipo 'Γ implica Δ', donde Γ y Δ son conjuntos de oraciones. El símbolo para implicación lógica suele ser $\Rightarrow$.

En los casos más usuales los secuentes son del tipo '$\Gamma \Rightarrow A$'. Es decir, que Γ implica lógicamente A. Pero un secuente puede tener un conjunto Δ en la parte derecha. Esto significa intuitivamente que Γ implica que *alguna* oración de Δ es verdadera. Es decir, no es posible aceptar toda oración de Γ y rechazar toda oración de Δ.

A diferencia de la deducción natural, donde pasamos de fórmulas a fórmulas, en cálculo de secuentes las reglas nos llevan de un secuente a otro. Por ejemplo, si A implica B, A también implica $B \vee C$.

Del mismo modo que una deducción natural, un sistema lógico se presenta como un conjunto de reglas. Aquí presentaremos un sistema clásico (que de todos modos, es muy similar al sistema intuicionista).

Las reglas más sencillas son las referidas a la conjunción y la disyunción:

$$\text{R}\vee \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta}$$

$$\text{L}\vee \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}$$

Una manera posible de leer el secuente es ignorando los *contextos*, es decir, los conjuntos Γ y Δ. La primera regla dice que si algo implica A, también implica $A \vee B$. La segunda regla indica que si tanto A como B implican algo, entonces $A \vee B$ también lo implica.

Puede observarse que la primera regla corresponde a la introducción de la disyunción en deducción natural, y la segunda regla corresponde a su eliminación.

Las reglas para la conjunción son las siguientes:

$$\text{L}\wedge \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta}$$

De nuevo, estas reglas pueden interpretarse fácilmente. La primera dice que si A implica algo, $A \wedge B$ también lo implica (eliminación de la conjunción). La segunda dice que si algo implica tanto A como B, también implica $A \wedge B$ (introducción de la conjunción).

Las reglas para la negación son bastante más sencillas:

$$\text{R}\neg \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta}$$

$$\text{L}\neg \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta}$$

La interpretación de estas reglas es un poco más compleja. La primera nos dice que si Γ y A implican B, Γ implica B o implica $\neg A$. Es decir, o bien Γ implica B directamente, o bien Γ es incompatible con A y por eso implica B.

Una manera un poco más sencilla de leer las reglas, particularmente útil para estas reglas de la negación, es pensar al secuente izquierdo como indicador de falsedad, y al derecho como indicador de verdad. La primera regla nos dice que si A es falso, $\neg A$ es verdadero. Mientras que la segunda nos dice que si A es verdadero, $\neg A$ es falso. De todos modos, esta lectura debería tomarse con cuidado cuando la aplicamos a lógicas no-clásicas (donde el secuente izquierdo indica valor designado, y el derecho indica valor no-designado).

Las reglas para el condicional son algo más complejas:

$$\text{R}\!\rightarrow \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta}$$

$$\text{L}\!\rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta}$$

La primera regla nos dice que si A implica B, entonces 'A entonces B' es un teorema. Esto es un lado del teorema de la deducción (usualmente llamado *captura*). La segunda regla podemos leerla fácilmente de modo veritativo-funcional: si A es verdadero y B es falso, entonces $A \rightarrow B$ es falso.

Ahora tenemos las reglas. ¿Pero cómo procedemos a probar teoremas? Para ello es necesario un axioma. El axioma de este sistema clásico será el más natural de todos:

$A \Rightarrow A$.

Una demostración en deducción natural tiene una forma de árbol invertido. Abajo de todo esta la fórmula demostrada, y hacia arriba hay distintas ramas. Al tope de cada rama hay un axioma de identidad.

De todas formas, este sistema no alcanza para tener lógica clásica. Necesitamos algunas reglas adicionales, usualmente conocidas como *Contracción* y *Debilitamiento* (weakening). Estas son reglas *estructurales*, porque no responden a ningún conectivo en particular, sino a la estructura de las pruebas en general.

La regla de contracción nos dice que la cantidad de apariciones de una fórmula es irrelevante:

$$\text{LContr}\,\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{RContr}\,\frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}$$

Desde un enfoque meramente semántico, la regla de contracción es obvia. En un enfoque sintáctico como este, no es tan obvia. De hecho, recientemente muchos filósofos defendieron teorías no-contractivas (especialmente Elia Zardini). De cualquier manera, es una regla sumamente intuitiva.

La segunda regla que vamos a introducir es el Debilitamiento:

$$\text{LDeb}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{RDeb}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

La primera regla nos dice que si un argumento es válido, sigue siendo válido si agregamos premisas. Esto se conoce usualmente como *monotonía*. Existen muchos sistemas lógicos sin monotonía, aunque usualmente aplicados a inteligencia artificial o análisis de condicionales. Los sistemas no-monotónicos suelen ser semi-formales, porque las fallas de monotonía son 'materiales', no lógicas: por ejemplo, 'Juan se cae del quinto piso' implica 'Juan se muere', pero 'Juan se cae del quinto piso y hay un colchón gigante abajo' no implica 'Juan se muere'.

La segunda regla es bastante menos interesante. Sólo nos dice que si algo implica un conjunto de fórmulas, implica ese conjunto de fórmulas u otro. Si lo leemos de forma disyuntiva, esto es trivial.

Con estas ocho reglas operacionales (i.e. de conectivos) y estas cuatro estructurales, ya tenemos un sistema completo de lógica clásica.

Hay una regla estructural muy importante que es la de *Corte*. Esta regla nos dice lo siguiente:

$$\text{Cut}\,\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma', A \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

Esta regla nos dice que podemos 'cortar y pegar' dos pruebas. Podemos pensar en la instancia más sencilla de la regla: si A implica B y B implica C, entonces A implica C. Es decir, Corte nos indica que se da la propiedad de transitividad.

Si queremos leer la regla en términos veritativos, la regla nos indica que A no puede ser verdadera y falsa a la vez (si lo fuera, arrojaría como resultado el secuente vacío, que por medio de Debilitamiento implica la trivialidad).

La propiedad de Corte no forma parte de la presentación del sistema, pero es *admisible* en el sistema. Es decir, si las premisas fueran derivables, entonces la conclusión también lo sería. La prueba de admisibilidad de Corte suele considerarse la demostración fundamental en cualquier sistema de secuentes. Lo ideal es tener una teoría donde Corte sea admisible y no necesite ser postulada adicionalmente. La admisibilidad de corte es fundamental para probar algunas propiedades del sistema, como su decididibilidad. Asimismo, disponer de Corte nos permite simplificar mucho las pruebas.

Ahora podemos ver algunas demostraciones en secuentes. Si bien las demostraciones se leen 'hacia abajo', suelen hacerse 'de abajo hacia arriba'. Es decir, uno empieza por la fórmula que quiere demostrar, y va abriendo ramas hacia arriba tratando de determinar qué reglas se usaron, hasta llegar a axiomas.

Probemos el Modus Ponens, es decir que $A, A \to B \Rightarrow B$:

$$\text{L}\!\to \dfrac{\text{RDeb}\,\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A, B} \qquad \text{LDeb}\,\dfrac{B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow B}}{A, A \to B \Rightarrow B}$$

Vamos ahora a algo más complejo, el Silogismo Disyuntivo:

$$\text{L}\neg\,\dfrac{\text{L}\vee\,\dfrac{\text{RDeb}\,\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow B, A} \qquad \text{RDeb}\,\dfrac{B \Rightarrow B}{B \Rightarrow B, A}}{A \vee B \Rightarrow B, A}}{\neg A, A \vee B \Rightarrow B}$$

Ahora probemos algo incluso más complejo: $A \to B, \neg B \Rightarrow A \to C$. Para hacer la prueba más sencilla podemos usar Corte:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\LeftLabel{RDeb}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A, B$}
\AxiomC{$B \Rightarrow B$}
\LeftLabel{LDeb}
\UnaryInfC{$A, B \Rightarrow B$}
\LeftLabel{L$\rightarrow$}
\BinaryInfC{$A, A \rightarrow B \Rightarrow B$}
\LeftLabel{L$\neg$}
\UnaryInfC{$A, A \rightarrow B, \neg B \Rightarrow$}
\LeftLabel{R$\neg$}
\UnaryInfC{$A \rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A$}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\LeftLabel{RDeb}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A, C$}
\LeftLabel{L$\neg$}
\UnaryInfC{$A, \neg A \Rightarrow C$}
\LeftLabel{R$\rightarrow$}
\UnaryInfC{$\neg A \Rightarrow A \rightarrow C$}
\LeftLabel{Cut}
\BinaryInfC{$A \rightarrow B, \neg B \Rightarrow A \rightarrow C$}
\end{prooftree}
$$

Usando este método, podemos probar todos los casos de validez de la lógica clásica. Las pruebas de admisibilidad de corte, completitud y corrección serán omitidas aquí, pero pueden consultarse en *Structural Proof Theory* de Negri y Von Plato (2001).

Antes de terminar, una observación relevante para el tema de las lógicas no-clásicas es que transformar un sistema clásico en uno intuicionista es *muy* sencillo. Sólo necesitamos prohibir los secuentes con más de una oración a la derecha. Es decir, sólo admitiremos secuentes de la forma $\Gamma \Rightarrow C$. De este modo, obtenemos lógica intuicionista. Por ejemplo, es fácil ver que los secuentes conjuntistas a la derecha son necesarios para probar algunas verdades clásicas como el tercero excluido (que no vale en lógica intuicionista).

Ejercicios

1. ¿Cómo pueden leerse de modo veritativo-teorético las reglas para secuentes de conjunción y disyunción? (Puede responderse a partir de la tabla de verdad)

2. Pruebe los siguientes secuentes:

   (a) $A \rightarrow B \Rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

(b) $A \vee B \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

(c) $\neg(A \rightarrow B) \Rightarrow \neg\neg A \wedge \neg B$

(d) $\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B$