Cálculo de secuentes modal

Diego Tajer

April 10, 2017

El cálculo de secuentes modal extiende el cálculo clásico (véase ficha anterior), introduciendo reglas específicas para el operador modal. Hay una cantidad infinita de lógicas modales, y aquí nos concentraremos en los sistemas más usuales: K, D, T y S4.

Recordemos los axiomas más relevantes de las lógicas modales:

(Regla Nec) Si $\vdash A$, entonces $\vdash \Box A$

(K) $\vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

(T) $\vdash \Box A \to A$

(D) $\vdash \neg\Box \perp$

(4) $\vdash \Box A \to \Box\Box A$

(5) $\vdash \neg\Box A \to \Box\neg\Box A$

En resumen, los sistemas más usuales son los siguientes:

Sistema K = Nec + K

Sistema D = Nec + K + D

Sistema S4 = Nec + K + T + 4

Sistema S5 = Nec + K + T + 4 + 5

Ahora podemos mencionar cómo se logra cada sistema con reglas de cálculo de secuentes. Para llegar a K, basta con agregar la siguiente regla:

$$\text{K}\,\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}$$

Debe notarse que en esta regla no hay contexto a la izquierda. Es decir, debe haber solo una fórmula. Esta regla expresa lo mismo que K: que si un argumento es válido, es necesariamente válido.

Es fácil observar cómo esta regla implica la regla Nec y el axioma K. La regla Nec es lo mismo que K pero cuando no hay nada a la izquierda:

$$\text{K}\,\frac{\Rightarrow A}{\Rightarrow \Box A}$$

La prueba del axioma K es un poco más compleja. Vamos a asumir que hemos llegado a una prueba del Modus Ponens (véase la ficha anterior de secuentes clásicos):

$$\rightarrow R\,\frac{\rightarrow R\,\dfrac{\text{K}\,\dfrac{A \rightarrow B, A \Rightarrow B}{\Box(A \rightarrow B), \Box A \Rightarrow \Box B}}{\Box(A \rightarrow B) \Rightarrow \Box A \rightarrow \Box B}}{\Rightarrow \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)}$$

La regla para D es muy sencilla:

$$\text{D}\,\frac{\Gamma \Rightarrow}{\Box\Gamma \Rightarrow}$$

Esta regla nos dice que si Γ es absurdo, entonces no puede ser necesario. La prueba del axioma D a partir de esta regla es trivial.

Para obtener T sólo necesitamos agregar la regla correspondiente, que nos indica que si algo es necesario, es verdadero:

$$\mathrm{T}\,\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Box A \Rightarrow \Delta}$$

Es muy fácil probar el axioma T a partir de esta regla:

$$\rightarrow R\,\dfrac{\mathrm{T}\,\dfrac{A \Rightarrow A}{\Box A \Rightarrow A}}{\Rightarrow \Box A \rightarrow A}$$

Para obtener S4 necesitamos agregar la regla 4 de transitividad, que nos indica que si algo es necesario, es necesario que sea necesario:

$$4\,\frac{\Box\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}$$

La prueba del axioma 4 a partir de esta regla también es sencilla:

$$\rightarrow R\,\dfrac{4\,\dfrac{\mathrm{K}\,\dfrac{A \Rightarrow A}{\Box A \Rightarrow \Box A}}{\Box A \Rightarrow \Box\Box A}}{\Rightarrow \Box A \rightarrow \Box\Box A}$$

Hasta ahí, los secuentes modales son relativamente fáciles. El problema aparece con S5. Hasta ahora no se ha podido desarrollar un cálculo de secuentes natural para S5 que admita la regla estructural de Corte. Como dijimos en la ficha anterior, esta regla es fundamental en cualquier cálculo de secuentes.

La representación de S5 es el problema fundamental del cálculo de secuentes modal. Aquí mencionaremos un enfoque específico que nos parece interesante, que es el de Hipersecuentes. Un hipersecuente es un conjunto de secuentes normales. Por ejemplo, un hipersecuente 3-ario podría ser el siguiente:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta | \Gamma' \Rightarrow \Delta' | \Gamma'' \Rightarrow \Delta''$$

Las reglas internas nos indican cómo modificar uno de esos lados. Por ejemplo, las reglas usuales de secuentes pueden leerse como aplicadas a cualquier lado en particular.

Las reglas *externas* nos muestran como operar respecto a los secuentes mismos. Por ejemplo, la regla de contracción externa nos dice que si dos secuentes se repiten, puedo borrar uno:

$$\text{ContrE}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta | \Gamma \Rightarrow \Delta | \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta | \Gamma' \Rightarrow \Delta'}$$

Para obtener S5, necesitamos las reglas de S4 y *además* una regla de separación de secuentes:

$$5\ \frac{G | \Box\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Box\Delta, \Delta' | H}{G | \Box\Gamma \Rightarrow \Box\Delta | \Gamma' \Rightarrow \Delta' | H}$$

Esta regla puede parecer muy extraña, pero nos permite derivar lo mismo que S5, y admite Corte.

Podemos ver, a modo de ejemplo, como probar el axioma 5 a partir de la regla 5 en hiper-secuentes:

$$\mathit{Contr}\ \cfrac{\mathit{DR}\ \cfrac{\neg R\ \cfrac{\mathrm{K}\ \cfrac{\mathrm{DL}\ \cfrac{\mathrm{K}\ \cfrac{\neg R\ \cfrac{5\ \cfrac{\mathrm{T}\ \cfrac{A \Rightarrow A}{\Box A \Rightarrow A}}{\Rightarrow A | \Box A \Rightarrow}}{\Rightarrow A | \Rightarrow \neg\Box A}}{\Rightarrow A | \Rightarrow \Box\neg\Box A}}{\Rightarrow A | \neg\Box A \Rightarrow \Box\neg\Box A}}{\Rightarrow \Box A | \neg\Box A \Rightarrow \Box\neg\Box A}}{\neg\Box A \Rightarrow | \neg\Box A \Rightarrow \Box\neg\Box A}}{\neg\Box A \Rightarrow \Box\neg\Box A | \neg\Box A \Rightarrow \Box\neg\Box A}}{\neg\Box A \Rightarrow \Box\neg\Box A}$$

Obviamente, una prueba en hipersecuentes es mucho más complicada que una prueba en secuentes modales. Por eso, la ejercitación solo incluirá ejercicios en secuentes modales normales, que son bastante accesibles.

Ejercicios

1. Pruebe los siguientes secuentes:

   (a) $\Box A \wedge \Box B \Rightarrow \Box(A \wedge B)$ (probar en K)

   (b) $\Box A, \Box\Box B \Rightarrow A \wedge B$ (probar en T)

   (c) $\Box A \vee \Box B \Rightarrow \Box\Box A \vee \Box\Box B$ (probar en S4)