Lógicas epistémicas sin omnisciencia

Como observamos la semana pasada (véase ficha de Lógica Epistémica), la lógica epistémica estándar interpreta el operador K de conocimiento como un operador de una lógica modal normal. [Nota: por hoy ignoraremos los contextos multi-agente: K es un agente cualquiera y no hay más agentes en el escenario]

De este modo, K satisface Nec (lo que implica que cualquier agente conoce todas las verdades lógicas) y DIST (lo que implica que cualquier agente conoce las consecuencias de lo que conoce).

Pero esto no es muy razonable como supuesto sobre agentes normales: por ejemplo, nadie conoce *todas* las verdades lógicas. Modificar la lógica epistémica de modo tal que pueda entender a los agentes ordinarios y su incapacidad cognitiva *no es fácil*. Hoy exploraremos algunos métodos que fueron usados con este propósito.

1. **Método sintáctico**

El método sintáctico nos dice lo siguiente: F es una función que asigna 1 o 0 a las fórmulas.

F(A&B)=1 sii F(A)=1 y F(B)=1

F(AvB)=1 sii F(A)=1 o F(B)=1

F(¬A)=1 sii F(A)=0

Ahora bien, respecto a las fórmulas KA, F(KA) es arbitrario. Puede darle 1 o 0 en cualquier ocasión.

Podemos entender a esta función F como una valuación (porque cumple los requisitos de una valuación para fórmulas sin F). Básicamente puede suceder cualquier cosa respecto a K. De hecho, K no estará ni siquiera cerrada bajo equivalencia lógica: puede suceder que F(KA)=1 y F(KB)=0, cuando A es equivalente a B.

Uno puede capturar las condiciones de la lógica epistémica estándar poniendo requisitos más fuertes sobre F. Por ejemplo que si A es lógicamente equivalente a B, entonces F(A)=F(B). O que F(KA) no puede ser 1 cuando F(A)=1. De todos modos, sin estos requisitos extra se trata de un enfoque muy débil.

Ejercicio: ¿Cómo hacemos para que el conocimiento satisfaga el principio KK (si conozco algo, conozco que lo conozco)?

2. Método semántico

El método semántico parte del supuesto clásico de que podemos definir a una proposición de acuerdo a los mundos posibles donde esa proposición es verdadera. Es decir, en un marco donde los mundos son {w,w'} y w, w' |=q, w |= p pero w' |= ¬p, la proposición p puede leerse como {w}, la proposición ¬p es {w'} y la proposición q es {w, w'}.

En un enfoque semántico de la lógica epistémica, la interpretación de K en un mundo w, es decir, K(w), es un conjunto de proposiciones. Por ejemplo, en el caso anterior, si en w el agente sabe p y q, diremos que K(w)={{w}, {w,w'}}.

En un mundo w, KA es verdadero siempre que la proposición A pertenece a K(w).

> **Ejemplo**. Supongamos que tenemos los mundos {s,t,u}. La proposición *p* es verdadera en s y u, y falsa en t.
>
> K(s)=K(t)={{s,t},{s,t,u}}
>
> K(u)={{u},{s,u},{t,u},{s,t,u}}
>
> Consideremos las fórmulas Kp y K¬p. Recordemos que p={s,u}. Y ¬p={t}. Entonces, en u el agente sabe p. En s y t, el agente no sabe ni *p* ni ¬*p*.

Las teorías semánticas tienen algunas propiedades positivas comparado con las sintácticas. En particular, satisfacen la clausura de K bajo equivalencia. Dado que dos fórmulas son equivalentes cuando son verdaderas en los mismos mundos, siempre que KA y A equivale a B, también sucede que KB.

Otras propiedades *no* se conservan. Por ejempo, puede suceder que Kp pero ¬K(pvq). Podríamos pensar en qué restricciones deberíamos poner para que K vuelva a cumplir las reglas de la omnisciencia lógica. Por ejemplo, si queremos que KA y KB implique K(A&B), podemos pedir que K(w) siempre esté cerrado bajo intersección (es decir, si incluye S y T, incluye S∩T.

Ejercicio: ¿Cómo garantizamos que si KA, entonces K(AvB)?

3. Cambio de lógica

Una manera de representar la falla de omnisciencia lógica es usando otra lógica. Por ejemplo, podemos usar una lógica tipo relevantista (la llamaremos R) como la siguiente, donde cada mundo w tiene un mundo espejo w*.

W ⊨ A&B sii w ⊨ A y w ⊨ B

W ⊨ AvB sii w ⊨ A o w ⊨ B

W $\vDash \neg$A sii w* $\nvDash$ A.

W $\vDash$ KA sii en todo mundo w’ tal que wRw, w $\vDash$ A.

Para recuperar el principio de doble negación, asumimos que w**=w.

La existencia de mundos espejo permite que en ciertos mundos w, tanto A como ¬A sean verdaderas (o ninguna de las dos lo sea). Lo malo es que en esta lógica no hay ninguna verdad lógica: podemos empezar por probar que p v ¬p no es una verdad lógica.

Naturalmente, si cambiamos las reglas de la *verdad*, cambiarán las reglas del conocimiento. Si nos molestaba que los agentes antes supieran toda verdad lógica, ahora eso no puede molestarnos: no hay verdades lógicas que el agente deba saber.

Sin embargo, se satisface la clausura deductiva: si el agente sabe A, y A implica B de acuerdo a esta lógica R, A también sabrá B. Por ejemplo, si K(A&B) entonces KA. Pero la clausura no se da de acuerdo a la lógica clásica.

Ejercicio: Así como w=w** recuperaba la doble negación, ¿qué pequeño cambio podemos hacer para recuperar la lógica clásica entera?

4. Mundos imposibles

El problema con el enfoque anterior es que cambiamos las leyes de la *verdad* en vistas de cambiar las leyes del *conocimiento*. Pero en realidad podemos lograr lo segundo sin estar forzados a lo primero.

Esto lo hacemos con una lógica modal no-normal. En este tipo de sistemas, tenemos dos *clases* de mundos. Por un lado, los mundos normales, entre ellos el mundo actual @. Estos mundos se rigen bajo la lógica clásica. Sin embargo, otros mundos se rigen bajo otras reglas. En el enfoque *americano*, los mundos imposibles tienen una estructura determinada. En el enfoque *australiano*, los mundos imposibles no tienen ninguna estructura.

Aquí vamos a adoptar el enfoque *americano*, y diremos que los mundos imposibles tienen la estructura de los mundos posibles de la lógica R de la sección anterior. Cualquier mundo w puede acceder a estos mundos imposibles.

La definición de K es la misma que en la lógica modal estándar. Pero la definición de validez nos dice que A es válido cuando es verdadero en cualquier mundo *actual* de cualquier modelo. Es decir, cuando es verdadero en cualquier mundo normal de cualquier modelo.

Por ejemplo, todas las verdades clásicas son válidas en esta lógica. Sin embargo, K(p v ¬p) falla, porque @ podría acceder a un mundo imposible w donde p v ¬p no es verdadero.

En este enfoque, recuperamos la lógica clásica (a diferencia del enfoque de la sección anterior), y tenemos algunas reglas epistémicas que van más allá de la clausura bajo equivalencia (a diferencia del enfoque semántico y sintáctico).

Ejercicio: Supongamos que A y B son clásicamente equivalentes. ¿Es cierto en este enfoque que KA sii KB?

Fuente: Fagin *et al.*, *Reasoning about knowledge* (2005), cap. 9