<u>Lógica difusa</u>

1. Vaguedad

En clases anteriores nos preguntamos por la paradoja *sorites*:

1. Una persona con 0 pelos es pelada.
2. Si una persona pelada le agrego UN pelo, sigue siendo pelada [Tolerancia]

Esto tiene como consecuencia que:

3. Una persona con 435467657567567 pelos es pelada.

¿Qué es lo que falla en la premisa de Tolerancia?

Las propuestas *epistemicistas* (Williamson) nos dicen que en determinado número *n*, las personas dejan de ser peladas. Ese corte preciso existe, pero no sabemos cuál es.

Las propuestas *dialeteístas* (Priest) nos dicen que en un margen intermedio las personas son *peladas y no peladas*. Lo bueno del dialeteísmo es que permite hacer verdadero a cualquier condicional de tolerancia: $1 \rightarrow 1 = 1$, $1 \rightarrow b = b$, mientras que $b \rightarrow 0 = b$.

Asimismo, Priest considera que *sorites* puede representarse con el esquema de inclausura. Donde Ω es el conjunto de personas peladas, y δ(X) es el conjunto de personas que tienen *un pelo* más.

Las propuestas *paracompletas* nos dicen que en un margen intermedio las personas son *ni peladas ni no-peladas*. La ventaja de la lógica paracompleta es que la indeterminación es más "intuitiva" que la paraconsistencia. Pero no valida las premisas de tolerancia, porque $1 \rightarrow i = i$.

En ambos casos tenemos un problema general, y es que necesitamos postular *cortes precisos* entre los casos claros y los casos intermedios.

La lógica *difusa* permite reconstruir la idea de que el cambio es *paulatino* y *continuo*, sin necesidad de postular cortes precisos.

2. Lógica difusa

La versión tradicional de la lógica difusa es la de Zadeh (1965). Zadeh propone una lógica con *infinitos* y *continuos* valores de verdad; es decir, tantos valores como números reales entre 0 y 1. La idea es que una persona puede ser pelada en grado .2, por ejemplo.

El problema de la lógica difusa es cómo dar cuenta de afirmaciones compuestas. Zadeh propone lo siguiente:

$V(\neg A) = 1 - V(A)$

$V(A \wedge B) = \min(V(A), V(B))$

$V(A \vee B) = \max(V(A), V(B))$

Entonces, si Juan es alto en grado .4, y María es feliz en grado .3, la afirmación "Juan es alto o María es feliz" tendrá grado .4. Asimismo, "Juan no es alto" valdrá .6, y "Juan es alto y María es feliz" tendrá grado .3.

Puede notarse que las cláusulas recién expuestas coinciden con las de la lógica clásica, e incluso con LP o K3. Lo particular de Zadeh es que permite infinitos valores de verdad.

Zadeh proponía analizar el condicional $A \rightarrow B$ como $\neg A \vee B$. Lo malo de esto es que $A \rightarrow A$ podría no valer 1 (por ejemplo, en casos donde A vale .5).

Usualmente se propone que el condicional difuso debe analizarse así (esto suele conocerse como "condicional de Lukasiewicz", porque coincide con el condicional de Lukasiewicz para L3):

$$V(A \rightarrow B) = \begin{cases} 1 & \text{siempre que } V(A) \leq V(B) \\ 1 - (V(A) - V(B)) & \text{siempre que } V(A) > V(B) \end{cases}$$

Entonces, siempre que el consecuente sea más verdadero que el antecedente, el condicional valdrá 1. Sin embargo, cuando el antecedente es más verdadero que el consecuente, el condicional será más o menos verdadero de acuerdo a la *diferencia* entre antecedente y consecuente. Por ejemplo, si el antecedente es *muy* verdadero (.9) y el consecuente es *muy* falso (.1), el condicional será *muy* falso (.2). Por otro lado, si el antecedente es bastante verdadero (.6) y el consecuente es *un poco menos verdadero* (.5), el condicional será *muy* verdadero (.9).

Puede probarse que la cláusula del condicional coincide con la de la lógica clásica en valores normales, y también que coincide con *L3* cuando hay sólo tres valores (donde *i* es .5).

3. Lógica difusa como solución a sorites

La solución difusa a la paradoja *sorites* nos dice que las personas con 0 pelos son peladas en grado 1, pero las personas con 1 pelo son peladas en grado .99 (o algo así). A medida que agregamos un pelo, irá disminuyendo el grado de peladez. Hasta finalmente llegar a alguien claramente no-pelado (valor 0).

Es interesante ver qué sucede con las afirmaciones de Tolerancia en este contexto:

Todas las afirmaciones del tipo "si alguien con n pelos es pelado, alguien con n+1 pelos también lo es" en la secuencia serán *muy* verdaderas. Puesto que son cambios muy graduales: en el caso de 0 pelos y luego 1 pelo, será 1 → .99 = .99. Luego tendremos 1 pelo en .99 y 2 pelos en .98, entonces .99 → .98 = .99. Si seguimos así, todos los condicionales van a valer .99, porque la diferencia que hace *un* pelo es simplemente .01.

Sin embargo, no todo es felicidad.

4. Validez en lógica difusa

La lógica difusa está planteada originalmente como un modelo/representación de un escenario. Entonces la validez podría definirse de distintos modos. Un modo usual es decir lo siguiente:

$\Gamma \vDash_n A$ siempre y cuando, en toda valuación donde $V(\gamma) \geq n$ para todo $\gamma \in \Gamma$, también sucede que $V(A) \geq n$

Puede haber una lógica para cualquier *n* en el intervalo [0,1]. Naturlmente algunas serán muy malas (por ejemplo si *n* es 0).

Una lógica más fuerte se obtiene del siguiente modo

$\Gamma \vDash A$ siempre y cuando, *para cualquier n*, $\Gamma \vDash_n A$

Por ejemplo, $A \vDash A \vee B$. Porque no importa qué *n* escojamos, siempre $A \vee B$ tendrá un valor mayor o igual que A. Mientras que $\nvDash A \vee \neg A$, porque esto vale cuando n es menor o igual a .5, pero no cuando *n* es mayor.

En mátemática decimos que el valor *ínfimo* de un conjunto es el mayor valor que es menor o igual que todos los del conjunto. Cuando el conjunto es finito, el ínfimo será igual al mínimo del conjunto. Pero cuando el conjunto es infinito, el ínfimo podría no estar en el conjunto (por ejemplo, X podría incluir todos los números reales mayores que *pi*, y el ínfimo de X sería *pi*). En términos generales, $\vDash$ puede definirse de este modo:

$\Gamma \vDash A$ siempre y cuando, *ínfimo*$(v(\Gamma)) \leq V(A)$

En tanto el número de premisas sea finito, esto es equivalente a

$\Gamma \vDash A$ siempre y cuando, para toda V, $V((\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \rightarrow A) = 1$.

Esta lógica será equivalente a $\vDash_1$, es decir, una **lógica con infinitos valores donde el único designado es 1**. Esto se conoce como lógica de Lukasiewicz, o $Ł_{\aleph}$.

Obviamente en la lógica de Lukasiewicz no habrá teoremas salvo aquellos que contienen el condicional, como el Tercero Excluido. Prueba rápida: En tanto las letras proposicionales valgan .5, cualquier compuesto que no incluya el condicional valdrá .5. Esto también sucedía en *L3*.

El *modus ponens* es válido también en $Ł_{\aleph}$. Pero no se aplica en el argumento *sorites* porque las premisas no valen 1.

5. Problemas y lógicas difusas alternativas

Podemos ver algunas características problemáticas de la lógica de Zadeh:

- Tautologías como $A \vee \neg A$ podrían valer desde 1 hasta .5
- Contradicciones como $A \wedge \neg A$ podrían valer desde 0 hasta .5

Todo eso sucede cuando A vale .5.

Tampoco es claro que en casos intermedios funcione bien. Supongamos que *x* está en el absoluto intermedio entre azul y verde. Según Fine, "*x* es azul y *x* es azul" debe ser tan verdadero como "*x* es azul", por lo cual Zadeh está en lo correcto. Pero "*x* es azul y *x* es verde" debe ser claramente falso, y según Zadeh tendrá valor .5.

Ciertamente los resultados *experiementales* (Sauerland 2011, Alxatib & Pelletier 2011, Ripley 2011) muestran que las personas no son reacias a las contradicciones. Muchos tienden a aceptar que "una persona que gana 40.000 pesos es rica y no es rica" es una oración verdadera.

De todas formas, hay muchas posibles lógicas difusas, basadas en distintas normas *t* (esto lo salteo). Por ejemplo, la norma de Lukasiewicz es tal que:

$V(A \wedge B) = \max(0, x+y-1)$

Entonces, $A \wedge \neg A$ siempre va a valer 0.

Hay otras normas, por ejemplo, la lógica de producto donde

$V(A \wedge B) = V(A) \times V(B)$

Bibliografía

Priest, G. (2001) *Introduction no non-classical logics*, Cap. 11
Smith, N. (2015) "Undead argument: the truth-functionality objection to fuzzy theories of vagueness", *Synthese*